Matemática

e suas Tecnologias

Livro do Estudante

Ensino Médio

Matemática

e suas Tecnologias

Livro do Estudante

Ensino Médio

Brasília

MEC/INEP

2006

Coordenação Geral do Projeto
Maria Inês Fini

Coordenação de Articulação de Textos do Ensino Médio
Zuleika de Felice Murrie

Coordenação de Texto de Área
Ensino Médio
Matemática e suas Tecnologias
Maria Silvia Brumatti Sentelhas

Leitores Críticos
Área de Psicologia do Desenvolvimento
Márcia Zampieri Torres
Maria da Graça Bompastor Borges Dias
Leny Rodrigues Martins Teixeira
Lino de Macedo

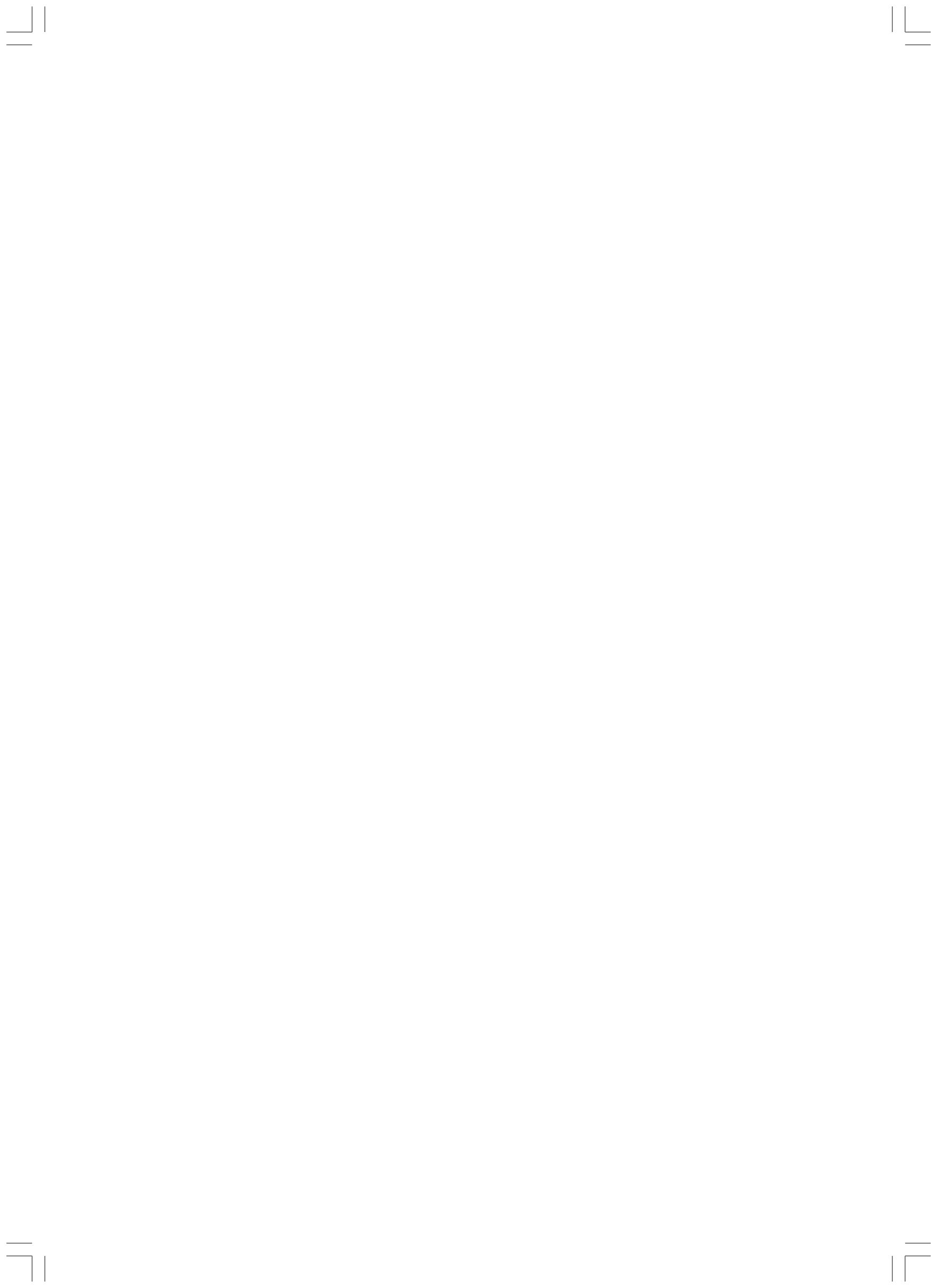
Área de Matemática
Área de Matemática e suas Tecnologias
Eduardo Sebastiani Ferreira
Maria Eliza Fini
Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão

Diretoria de Avaliação para Certificação de Competências (DACC)
Equipe Técnica
Ataíde Alves – Diretor
Alessandra Regina Ferreira Abadio
Célia Maria Rey de Carvalho
Ciro Haydn de Barros
Clediston Rodrigo Freire
Daniel Verçosa Amorim
David de Lima Simões
Dorivan Ferreira Gomes
Érika Márcia Baptista Caramori
Fátima Deyse Sacramento Porcidonio
Gilberto Edinaldo Moura
Gislene Silva Lima
Helvécio Dourado Pacheco
Hugo Leonardo de Siqueira Cardoso
Jane Hudson Abranches
Kelly Cristina Naves Paixão
Lúcia Helena P. Medeiros
Maria Cândida Muniz Trigo
Maria Vilma Valente de Aguiar
Pedro Henrique de Moura Araújo
Sheyla Carvalho Lira
Suely Alves Wanderley
Taíse Pereira Liocádio
Teresa Maria Abath Pereira
Weldson dos Santos Batista

Capa
Marcos Hartwich

Ilustrações
Raphael Caron Freitas

Coordenação Editorial
Zuleika de Felice Murrie

M425 Matemática e suas tecnologias : livro do estudante : ensino médio /
Coordenação : Zuleika de Felice Murrie. — 2. ed. — Brasília : MEC : INEP, 2006.
244p. ; 28cm.

1. Matemática (Ensino Médio). I. Murrie, Zuleika de Felice.

CDD 510

Sumário

Introdução

Este material foi desenvolvido pelo Ministério da Educação com a finalidade de ajudá-lo a preparar-se para a avaliação necessária à obtenção do certificado de conclusão do **Ensino Médio** denominada ENCCEJA – Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos.

A avaliação proposta pelo Ministério da Educação para certificação do **Ensino Médio** é composta de 4 provas:

1. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias
2. Matemática e suas Tecnologias
3. Ciências Humanas e suas Tecnologias
4. Ciências da Natureza e suas Tecnologias

Este exemplar contém as orientações necessárias para apoiar sua preparação para a prova de **Matemática e suas Tecnologias**.

A prova é composta de 45 questões objetivas de múltipla escolha, valendo 100 pontos.

Este exame é diferente dos exames tradicionais, pois buscará verificar se você é capaz de usar os conhecimentos em situações reais da sua vida em sociedade.

As competências e habilidades fundamentais desta área de conhecimento estão contidas em:

I. Compreender a Matemática como construção humana, relacionando o seu desenvolvimento com a transformação da sociedade.

II. Ampliar formas de raciocínio e processos mentais por meio de indução, dedução, analogia e estimativa, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.

III. Construir significados e ampliar os já existentes para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

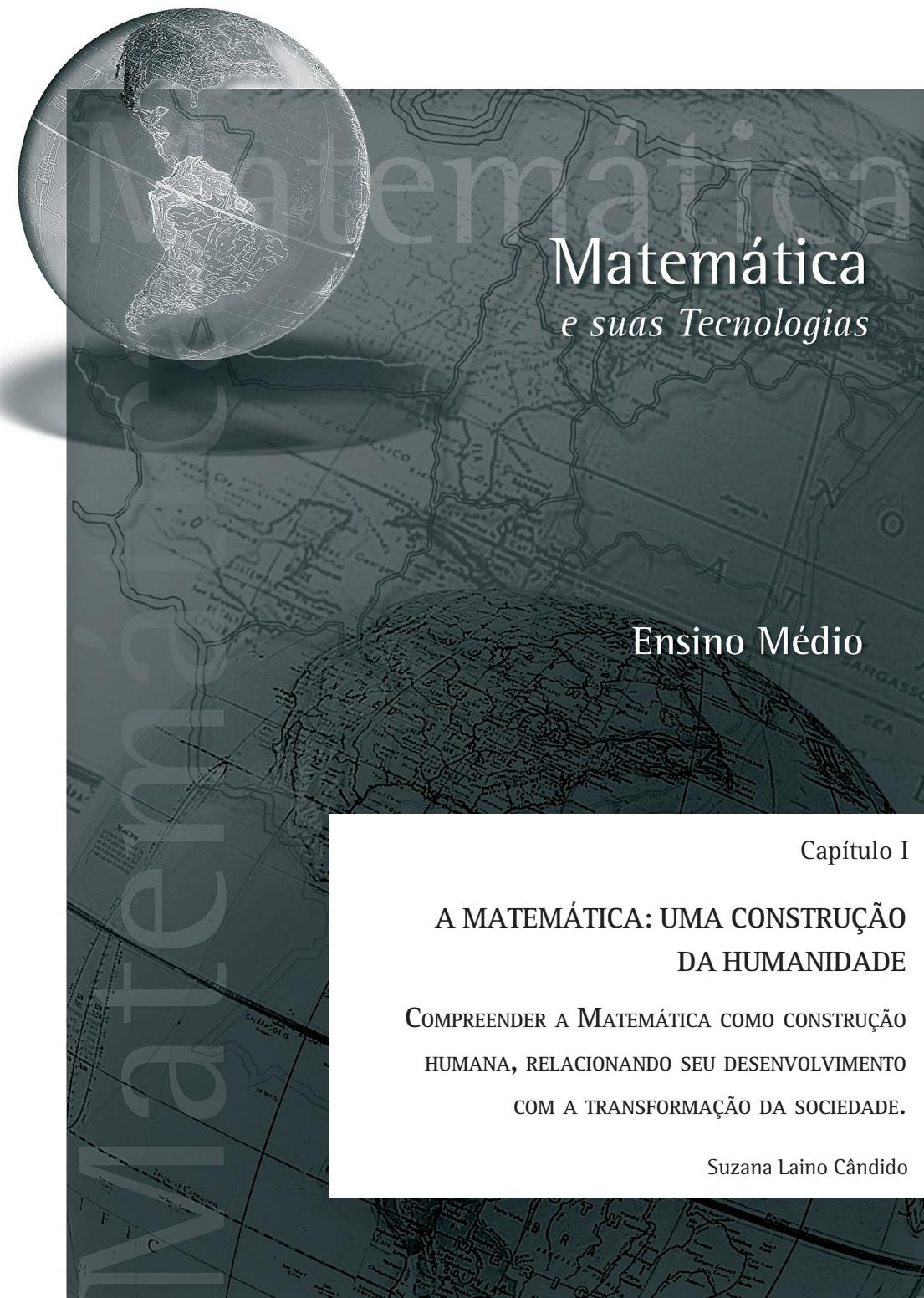
IV. Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade- e agir sobre ela.

V. Construir e ampliar noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

VI. Construir e ampliar noções de variação de grandeza para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

VII. Aplicar expressões analíticas para modelar e resolver problemas, envolvendo variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas.

VIII. Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

IX. Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas e cálculos de probabilidade, para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Os textos que se seguem pretendem ajudá-lo a compreender melhor cada uma dessas nove competências. Cada capítulo é composto por um texto básico que discute os conhecimentos referentes à competência tema do capítulo. Esse texto básico está organizado em duas colunas. Durante a leitura do texto básico, você encontrará dois tipos de boxes: um boxe denominado de **desenvolvendo competências** e outro, de ***texto explicativo***.

O boxe ***desenvolvendo competências*** apresenta atividades para que você possa ampliar seu conhecimento. As respostas podem ser encontradas no fim do capítulo. O boxe de ***texto explicativo*** indica possibilidades de leitura e reflexão sobre o tema do capítulo.

O texto básico está construído de forma que você possa refletir sobre várias situações-problema de seu cotidiano, aplicando o conhecimento técnico-científico construído historicamente, organizado e transmitido pelos livros e pela escola.

Você poderá, ainda, complementar seus estudos com outros materiais didáticos, freqüentando cursos ou estudando sozinho. Para obter êxito na prova de **Matemática e suas Tecnologias** do ENCCEJA, esse material será fundamental em seus estudos.

Capítulo I

A MATEMÁTICA: UMA CONSTRUÇÃO DA HUMANIDADE

COMPREENDER A MATEMÁTICA COMO CONSTRUÇÃO HUMANA, RELACIONANDO SEU DESENVOLVIMENTO COM A TRANSFORMAÇÃO DA SOCIEDADE.

Suzana Laino Cândido

Capítulo I

A Matemática: uma construção da humanidade

A Matemática e o dia-a-dia

As condições de vida da humanidade se modificaram ao longo do tempo, com o desenvolvimento da agricultura, do comércio, da indústria, do conhecimento e da tecnologia . E através das conseqüências do avanço em todas essas áreas.

Apesar de o homem não ter registrado o que fazia e pensava no início de sua história, ele precisava resolver problemas de seu dia-a-dia, ligados à sua subsistência.

Ao buscar soluções para eles, o conhecimento matemático começou a ser construído.

Figura 1 - Na comparação entre o número de aves do caçador e o número de peixes do pescador está a raiz de uma das mais belas idéias matemáticas: a proporcionalidade.

Desenvolvendo competências

1

Reflita sobre a seguinte situação:

Se os pescadores e caçadores daquela época trocassem sempre 2 aves por 3 peixes, quantos peixes deveria ter um pescador para trocar por 22 aves?

Como você resolveria esse problema?

Os homens das cavernas não dispunham ainda dos registros e técnicas operatórias atuais para resolver a questão.

O pescador poderia pensar assim: quero aves, mas só tenho peixes. Vou agrupar meus peixes de 3 em 3 e para cada grupo ponho 2 pedrinhas ao lado para representar as aves, até completar 22 pedrinhas. Então, conto quantos peixes preciso. São 33 peixes!

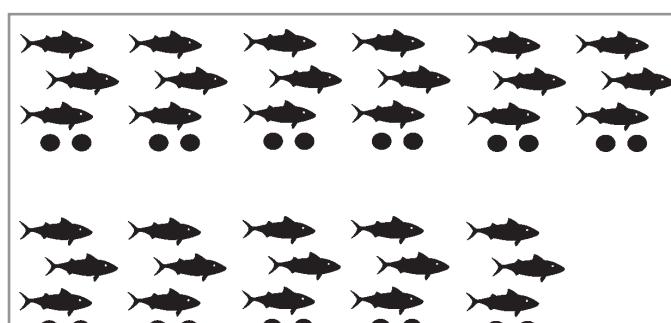



Figura 2

O caçador poderia pensar de um modo semelhante, para resolver o problema, agrupando suas 22 aves em grupos de 2; agora, as pedrinhas seriam peixes: 3 para cada grupo de aves. Contanto as pedrinhas, ele descobre que são 33 peixes!

Assim como esse, outros problemas que o homem tem resolvido em seu cotidiano deram grande impulso ao conhecimento da humanidade e, em particular, ao conhecimento matemático.

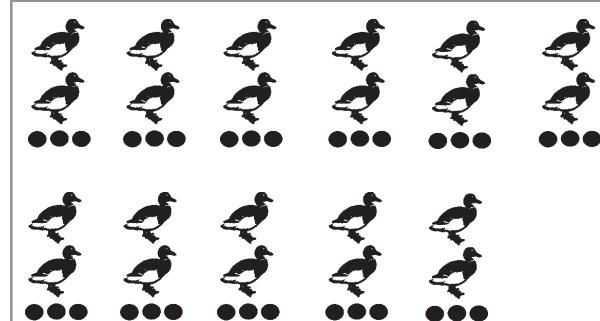



Figura 3

A Matemática e a linguagem

Tanto o pescador como o caçador pensaram de um modo até bastante sofisticado. Entretanto, talvez a estratégia que utilizaram para resolver a questão da troca já não fosse tão eficiente se tivessem que decidir quantos peixes trocar por 560 aves!

Com o correr do tempo, o homem passou a produzir mais e a ter um estoque do que produzia (superávit), além da necessidade do consumo próprio e de seu grupo. Com isso, as idéias e técnicas matemáticas foram se aperfeiçoando, para poder resolver os problemas que envolviam grandes quantidades, por exemplo.

É bem possível que você tenha resolvido o problema dos peixes de um modo mais rápido, como por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ \hline 00 & 11 \end{array} \qquad 11 \cdot 3 = 33$$

ou

$$\frac{2}{3} = \frac{22}{x}$$

$$\text{então } x = \frac{3 \cdot 22}{2} = 33$$

Esses símbolos que atualmente combinamos e usamos de um modo conveniente para registrar a resolução do problema dos peixes fazem parte de uma linguagem escrita que foi sendo construída, à medida que as idéias e conceitos matemáticos foram sendo descobertos, elaborados e aplicados pelo homem em outras situações: é a linguagem matemática.

Essa linguagem, quando é escrita, utiliza símbolos próprios e universais, o que permite uma comunicação que ultrapassa fronteiras das diversas línguas. Entretanto, quando nos comunicamos oralmente, utilizando essa linguagem, lançamos mão da língua materna. Veja um exemplo:

> *Um freguês de uma padaria compra, todos os dias, leite a R$1,10 o litro e alguns pãezinhos a R$ 0,20 cada. Como se pode representar a despesa dessa pessoa num dia?*

A situação acima, descrita em nossa língua materna, pode ser registrada por meio da linguagem matemática, que favorece a representação da despesa desse freguês para qualquer quantidade de pães que ele compre.

Podemos representar por **n** o número de pães e por **f(n)** (lê-se "f de n") a despesa. Assim, a despesa pode ser representada pela igualdade:

$$\underbrace{f(n)}_{\text{Despesa total}} = \underbrace{1{,}10}_{\text{Despesa com o leite}} + \underbrace{0{,}20 \,.\, n}_{\text{Despesa com os pães}}$$

É claro que até chegarmos a esse tipo de linguagem, milhares de anos se passaram.

A linguagem matemática está sempre em evolução, já que novas idéias e conceitos são criados a todo momento.

Desenvolvendo competências

2

Represente o que é solicitado em cada situação por uma sentença matemática, de acordo com as informações dadas:

1. Um táxi cobra R$3,50 a bandeirada e R$1,20 por quilômetro rodado. Como você pode representar a despesa de um passageiro que faz um percurso de alguns quilômetros nesse táxi? Represente por n o número de quilômetros rodados e por f(n) a despesa do passageiro.

2. Todos os terrenos de um condomínio têm 10m de frente, porém têm largura que varia de um terreno para outro. Como você pode representar a área de um terreno qualquer desse condomínio, que tem alguns metros de largura? Represente por A a área do terreno e por l sua largura.

Além de todos esses símbolos que utilizamos para nos comunicar e para resolver problemas, muitas vezes nos valemos de uma "linguagem" , constituída de ícones, gráficos e diagramas, impregnada de idéias matemáticas e cujo objetivo é comunicar informações do modo mais claro e preciso possível.

Agora é sua vez de simbolizar:

Desenvolvendo competências

Você e as placas de trânsito

Algumas placas de trânsito que você encontra nas ruas e estradas utilizam uma "linguagem" simbólica, muitas vezes impregnada de idéias matemáticas. Observe as placas ao lado.

a) O que elas significam?

b) Que idéia matemática cada uma delas utiliza?

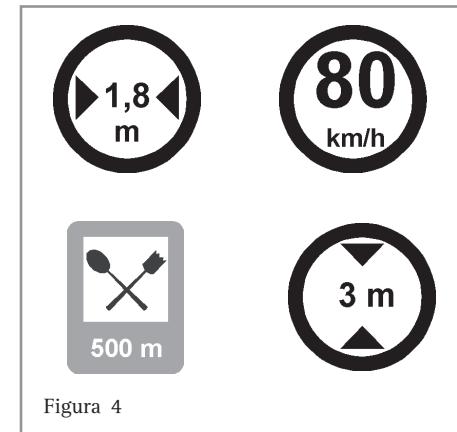



Figura 4

A todo momento, podemos constatar nos meios de comunicação (televisão, jornais, revistas, internet, folhetos, livros etc.), a presença dessa "linguagem". Uma pessoa que não a domina, não é capaz de compreender as informações apresentadas, o que poderá torná-la incapaz de participar de maneira integral de uma vida em sociedade.

Adaptado da Folha de S. Paulo, São Paulo, 17 dez. 2001. Cotidiano, p. C4.

Pense um pouco sobre os gráficos acima:
Os gráficos publicados pelo jornal fizeram parte de matéria sobre o "caso cracolândia", ocorrido na cidade de São Paulo, no final de 2001, e dizem respeito às ações promovidas pela Corregedoria da polícia civil e à situação de seus funcionários.

O gráfico denominado de *Os motivos das demissões* é chamado **gráfico de barras**, pois é constituído de barras retangulares horizontais, cujo comprimento representa o percentual dos motivos de corrupção no período de 1996 a 2001.

O gráfico denominado de *O número de demitidos* é chamado **gráfico de linha**, já que uma linha (a laranja) liga os pontos que representam os números de demitidos, mostrando a evolução desse número no período de 1996 a 2001.

Desenvolvendo competências

4

a) Você pode concluir que no período de 1996 a 2001 o número de demitidos da polícia civil, em São Paulo, sempre cresceu? Por quê?

b) "Na primeira metade desse período (1996-1998) foram demitidos aproximadamente 50% dos policiais demitidos no período todo (1996-2001). Você considera essa afirmação verdadeira? Justifique sua resposta.

Ao justificar suas respostas sobre o "gráfico dos demitidos" , você deve ter argumentado, baseando-se nos conhecimentos que construiu até hoje.

Por exemplo, quando dizemos que em 2001 o número de demitidos foi de aproximadamente 22% do total, entre 1996 e 2001, estamos comparando 172 com 797 e registrando o número $\frac{172}{797}$ na forma percentual.

Confira:

- dividimos 172 por 797, obtendo aproximadamente 0,215808 (confira com uma calculadora);
- multiplicamos 0,215808 por 100 para escrever esse número na forma percentual: 21,5808% (agora você já não precisa de calculadora!);
- também aproximamos esse número para 21,6%, desprezando as demais casas decimais que não representariam sequer 1 pessoa.

A forma percentual indica que comparamos uma parte dos demitidos com um total de 100. Assim, o número 21,6 % representa a seguinte situação ideal: se pudéssemos agrupar os 797 demitidos em grupos de 100 e espalhar igualmente por esses grupos os 172 demitidos, aproximadamente 21,6 pessoas em cada grupo teriam sido demitidas em 2001, o que na realidade não acontece, já que não existe 0,6 de pessoa. Então, esse número (21,6%), por estar mais próximo de 22% do que de 21%, deve ser aproximado para 22%, significando que, em cada grupo de 100 demitidos entre 1996 e 2001, há aproximadamente 22 demitidos em 2001.

Desenvolvendo competências

5

Agora é com você.

Observe o gráfico de barras e verifique quantos policiais foram demitidos no período de 1996 a 2001 por corrupção.

A partir das situações apresentadas, você deve ter percebido a importância da linguagem matemática para controlar e prever resultados (como no caso da despesa dos pães e leite), bem como para comunicar dados e idéias (como no caso das placas de trânsito e dos gráficos do jornal).

Essa linguagem foi pseudo-construída ao longo do tempo, à medida que as idéias matemáticas que ela descreve foram ficando cada vez mais claras e precisas para a humanidade.

O desenvolvimento da Matemática e os outros campos do conhecimento

Todos sabem que, se você deseja ser um físico ou engenheiro, deveria ser bom em Matemática. Mais e mais pessoas estão descobrindo que, se desejam trabalhar em certas áreas da Economia ou Biologia, deveriam rever sua Matemática. A Matemática penetrou na Sociologia, Psicologia, Medicina e Lingüística. Sob o nome de cliometria, está se infiltrando na História, para sobressalto dos mais velhos.

DAVIS, Philip J.; KERSH, Reuben. A experiência matemática. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, c 1989. 481p. (Coleção Ciência): The Mathematical experience.

Você já viu que o desenvolvimento da Matemática se deve em grande parte à busca de soluções para problemas que a humanidade tem enfrentado em seu dia-a-dia. Apenas para dar alguns exemplos:

- Que chance tenho em ter meu bilhete sorteado numa loteria de números?
- Como fixar as ripas de meu portão?
- Quantas estampas diferentes posso obter nos tecidos da tecelagem onde trabalho, se o fundo pode ser ou azul ou amarelo e o desenho pode ser de bolinhas brancas ou de listras pretas ou, ainda, xadrez vermelho?

Questões semelhantes a essa fizeram o homem pensar nos fenômenos probabilísticos, em questões geométricas, e nos problemas de contagem, respectivamente. Além desses campos específicos da Matemática aos quais eles se referem, outros mais foram desenvolvidos a partir de problemas que envolviam números, medidas, álgebra, ligados à realidade da humanidade.

Entretanto, os outros campos do conhecimento também têm solicitado respostas da Matemática para solucionar seus problemas específicos, contribuindo indiretamente para seu desenvolvimento.

Para citar um exemplo que mostra a Matemática sendo utilizada em outro campo do conhecimento, vamos focalizar nosso olhar na **Trigonometria**, ramo da Matemática que, até por volta do século XVII, desenvolveu-se em decorrência de uma ligação estreita entre a teoria e a prática.

No início de sua criação, a **Trigonometria** era um campo da Matemática no qual os ângulos de um triângulo e as medidas de seus lados eram relacionados.

As razões trigonométricas apareceram inicialmente por necessidades da **Astronomia**, da **Agrimensura** e da navegação.

Posteriormente, por volta dos séculos XVI e XVII, a **Trigonometria** esteve a serviço da Física para descrever e explicar fenômenos periódicos, como por exemplo:

- o movimento periódico dos planetas, estudado por Kepler.
- o movimento periódico dos pêndulos, estudado por Galileu.
- a propagação do som em forma de ondas, estudada por Newton.
- a propagação da luz em forma de ondas, estudada por Huyghens.
- a vibração de uma corda de violino, estudada por Mersenne.

Tri (*três*) gono (*ângulo*) metria (*medida*)

Astronomia
é a ciência que estuda as posições relativas, os movimentos, a estrutura e a evolução dos astros.

Agrimensura
é a técnica de medida dos elementos geométricos das partes de um terreno

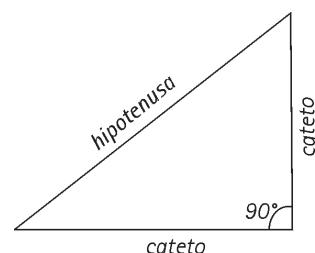
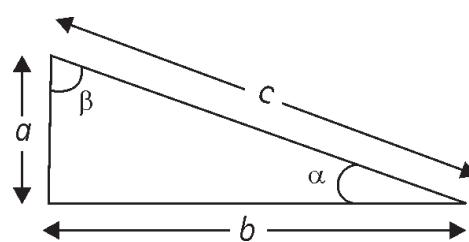



Figura 5 - Triângulo retângulo é o triângulo que tem um ângulo reto (de 90°).

Atualmente, as razões trigonométricas num triângulo retângulo são apresentadas como na Figura 6.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\beta$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \cot g\beta$$

Figura 6 – Onde a, b e c são as medidas dos catetos e da hipotenusa desse triângulo retângulo; a e b seus ângulos agudos; e sen (seno), cos (co-seno) e tg (tangente) são razões entre medidas dos lados desse triângulo, como estão descritas acima.

Já no final do século XVII, com o início do desenvolvimento do conceito de Função, o estudo da Trigonometria se ampliou para um campo mais abstrato, desligando-se assim das aplicações práticas.

As razões trigonométricas já eram utilizadas pelos egípcios para resolver problemas de Arquitetura, por ocasião das construções das pirâmides. Para manter constante a inclinação das paredes das pirâmides durante a construção, eles mantinham constante o quociente do "afastamento horizontal" pelo "afastamento vertical", que eram medidos com unidades diferentes.

Na figura a seguir os afastamentos horizontais foram representados por h_1, h_2 e h_3 e os verticais, por v_1, v_2 e v_3.

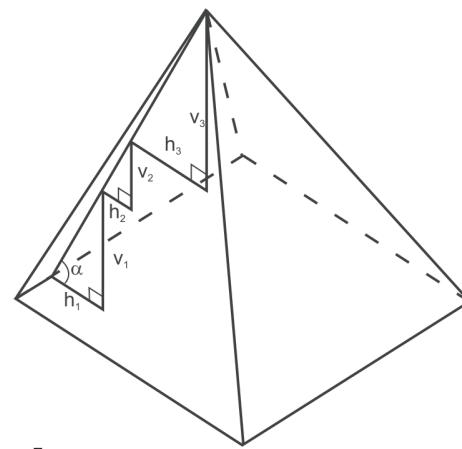
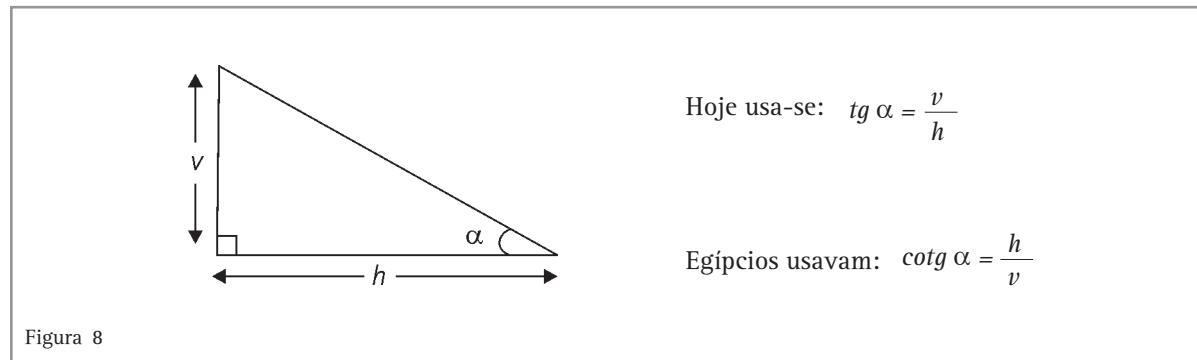
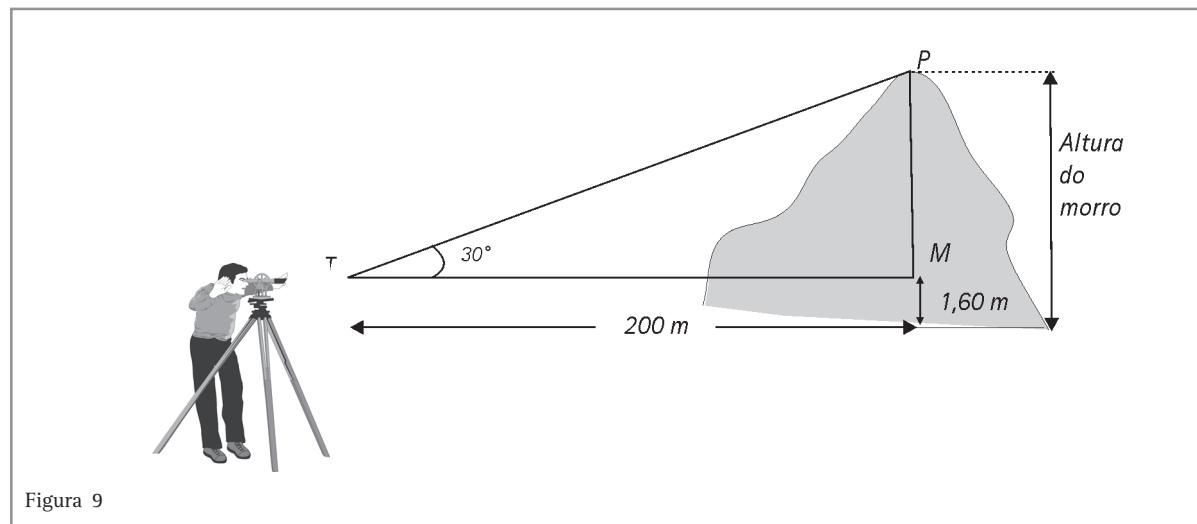



Figura 7

Assim, quando eles constatavam que

$$\frac{h_1}{v_1} = \frac{h_2}{v_2} = \frac{h_3}{v_3} = \cdots = c \text{ (constante)}$$

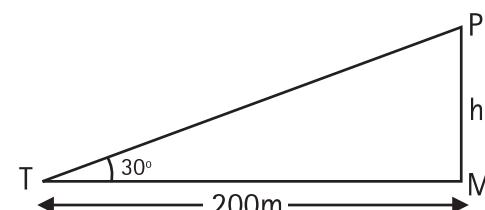
concluíam que a parede apresentava sempre a mesma inclinação.

Ora, o quociente entre essas medidas é nada mais, nada menos, do que uma razão trigonométrica, conhecida hoje por **cotangente** do ângulo de inclinação da parede com o chão.

Hoje em dia mede-se a inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais (tangente do ângulo de inclinação), razão essa inversa da utilizada pelos egípcios para resolverem problemas arquitetônicos.

Figura 8

Atualmente, os topógrafos dispõem de instrumentos de medida de ângulo que lhes permitem determinar medidas por vezes inacessíveis.

Figura 9

Desejando saber qual a altura do morro que tinha à sua frente, um topógrafo colocou-se com seu teodolito a 200m do morro. Ele sabe que a altura do teodolito é de 1,60m. Posiciona o aparelho que lhe fornece a medida do ângulo de *visada* de parte do morro: 30°. Consulta uma tabela de tangentes e verifica que tg 30° = 0,57.
Assim, no triângulo TPM temos:

$$tg\,30^o = \frac{h}{200} \quad ou \quad 0{,}57 = \frac{h}{200}$$

o que lhe permite calcular h:

h = 200 x 0,57 = 114

O topógrafo conclui que o morro tem 114 + 1,60 = 115,60m de altura.

Uma experiência que você também pode fazer

Veja como é possível encontrar a tangente de um ângulo agudo, experimentalmente. Como exemplo, vamos determinar a tangente de um ângulo de 35° (indica-se tg 35°), utilizando:

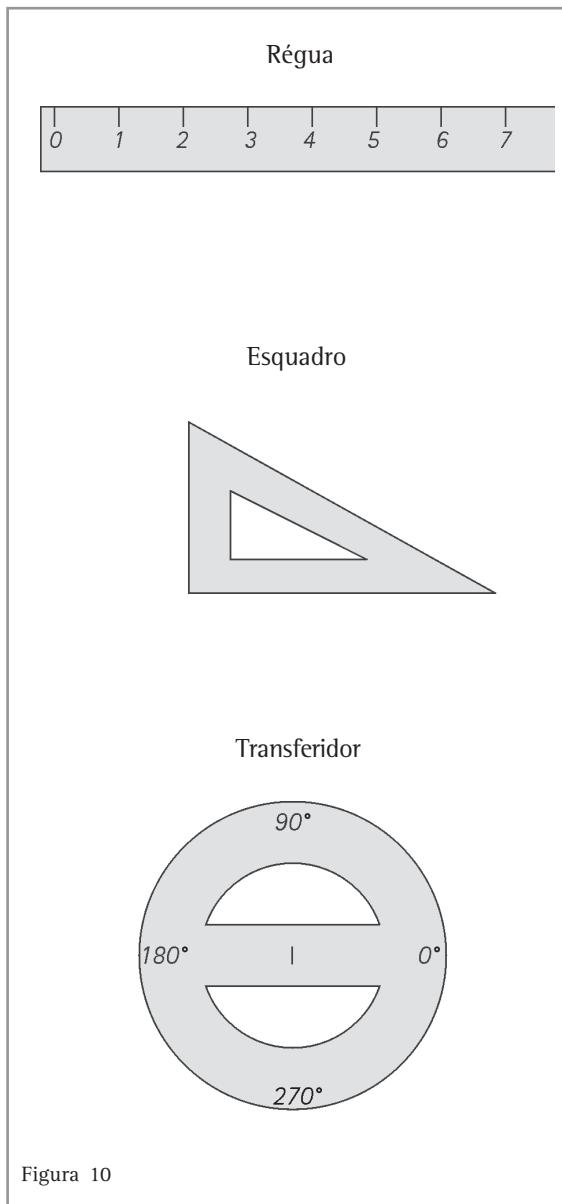



Figura 10

- Construímos, com a régua e o transferidor, um ângulo de 35°.

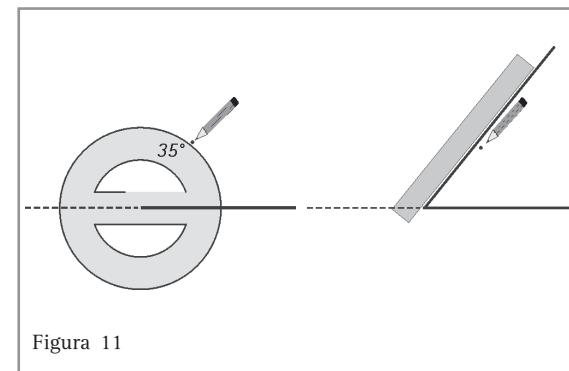



Figura 11

- Apoiamos o esquadro em um dos lados do ângulo em vários pontos desse lado (por exemplo, A, B, C); traçamos perpendiculares a esse lado até encontrar o outro lado em pontos correspondentes (A', B', C').

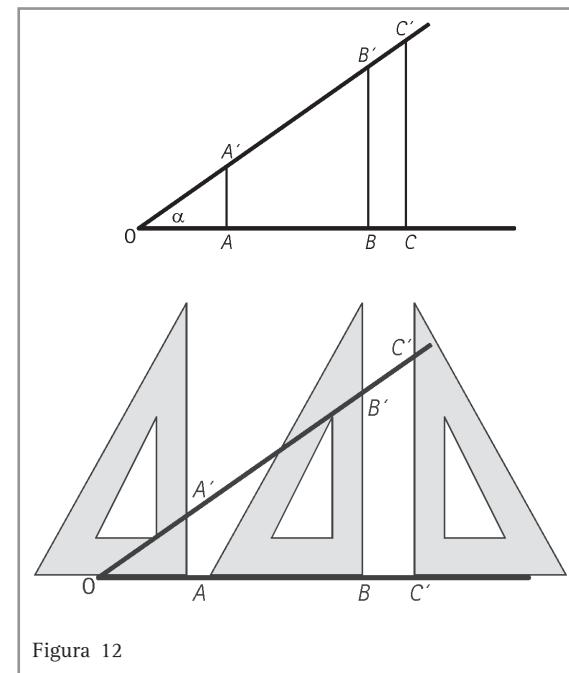



Figura 12

Foram construídos, assim, vários triângulos retângulos: OAA', OBB', OCC', destacados a seguir

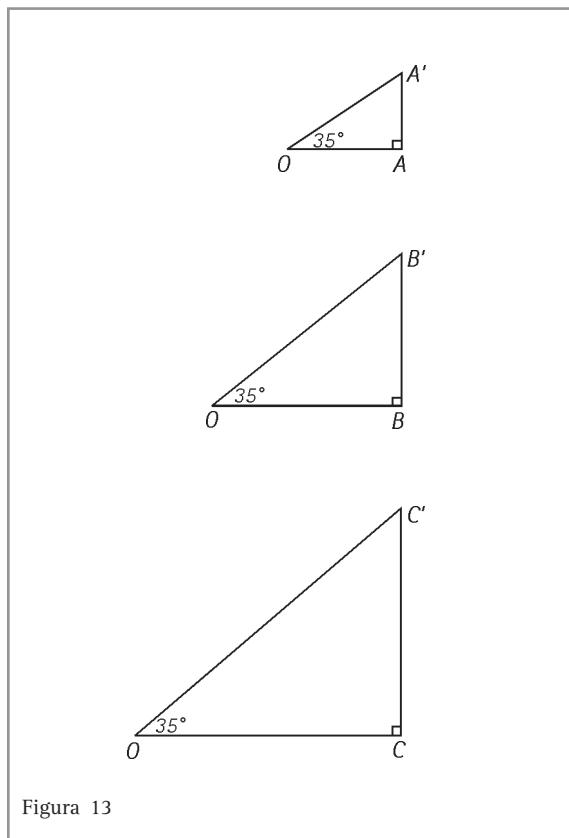



Figura 13

Como

$$tg\ 35° = \frac{\textit{medida do cateto oposto ao ângulo de 35°}}{\textit{medida do cateto adjascente ao ângulo de 35°}},$$

em cada triângulo medimos o cateto oposto ao ângulo de 35° (AA', BB', CC') e o cateto adjacente a esse ângulo (OA, OB, OC) para encontrarmos o valor de tg 35°:

$$tg\ 35° = \frac{1,02}{1,52} = 0,67$$

$$tg\ 35^o = \frac{3,05}{4,06} = 0,75$$

$$tg\ 35^o = \frac{3,56}{4,83} = 0,73$$

Calculamos a média aritmética dos valores obtidos para expressar o valor mais representativo de tg 35°, do seguinte modo:

$$tg\ 35° = \frac{0,67 + 0,75 + 0,73}{3} = 0,71$$

Com um processo semelhante podemos determinar experimentalmente o seno e o cosseno de ângulos agudos.

Desenvolvendo competências

6

Para você desvendar uma construção estranha

O quebra-cabeça a seguir é muito conhecido. Para desvendá-lo, você precisa pensar na tangente de ângulos agudos em triângulos retângulos. Vamos experimentar?

A Figura 14 é uma região quadrada, montada com figuras de um quebra-cabeça formado por 4 peças: dois triângulos e dois trapézios.

Essas peças são compostas de outra maneira, formando outra região retangular na Figura 15.

Isso é possível, já que as peças que formam o quebra-cabeça da Figura 14 são as mesmas que formam o quebra-cabeça da Figura 15. Concorda ou não?

Você acha que eles deveriam ter a mesma área, já que são compostos pelas mesmas peças?

Agora, confira se a região quadrada da Figura 14 tem 64 □ de área e a região retangular da Figura 15 tem 65 □ de área.

Finalmente responda: por que a área da Figura 14 tem uma unidade a mais do que a área da Figura 15?

Para resolver esse problema, imite os egípcios, porém usando a tangente dos ângulos α e β assinalados na Figura 16 ao lado.

Se eles possuírem a mesma tangente é porque são iguais e, então, a linha AB é realmente um segmento de reta.

Caso eles não tenham a mesma tangente, então a linha AB muda de inclinação no ponto X.

Aproveite o quadriculado e escolha dois triângulos retângulos convenientes, na figura, para você determinar tg α e tg β. Considere o lado do quadradinho como uma unidade de medida (u).

Mãos à obra!

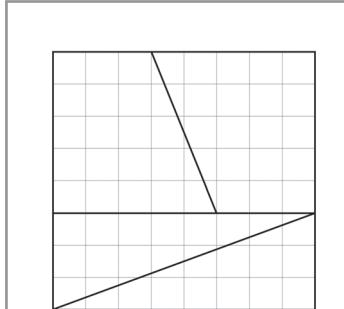



Figura 14

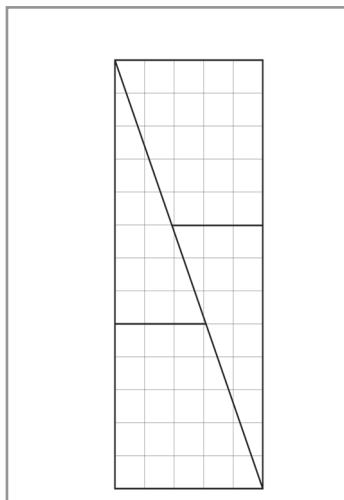



Figura 15

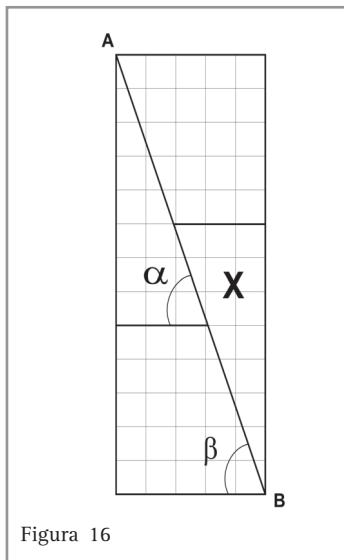



Figura 16

Depois de tirar sua conclusão, você pode confirmá-la, montando o quebra-cabeça da Figura 14 numa malha quadriculada de 2cm x 2cm e depois recortando as peças e montando o quebra-cabeça da Figura 15. Vai ter uma surpresa, que confirmará sua resolução anterior. Experimente!

Neste quebra-cabeça você foi incentivado a utilizar seu conhecimento sobre as tangentes de ângulos agudos, na prática, a fim de explicar por que a área da nova região retângular é diferente da área da região quadrada inicial.

Você observou que foi necessária uma ferramenta teórica para dar tal explicação: o conceito de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Mas você fez também o caminho inverso. Experimentou montar a região quadrada inicial num quadriculado maior, separando suas peças, rearranjando-as para montar a segunda região retangular. Verificou, então, que nesse caso, o quebra-cabeça "não fecha" (fica uma fenda no meio dele), mostrando que a área da segunda figura é maior do que a da primeira. Essa prática confere ao conhecimento construído (conceito de tangente) uma certa confiabilidade.

Esse movimento (conhecimento-prática-conhecimento) ocorreu inúmeras vezes na construção do conhecimento matemático. Algumas teorias, como as geometrias não-euclidianas, foram criadas não por necessidades impostas pela realidade, nem para atender a outras ciências, nem à Matemática, mas por simples exercício do intelecto e só muito tempo depois de sua criação encontraram aplicação na Física. A teoria geral da relatividade elaborada por Einstein não teria sido possível sem uma dessas geometrias. É a aplicação prática novamente dando confiabilidade ao conhecimento matemático construído.

Ainda vale a pena lembrar que muitos problemas práticos ou científicos são resolvidos por modelização, isto é, criam-se modelos matemáticos para resolvê-los, como no caso da Química.

Desenvolvendo competências

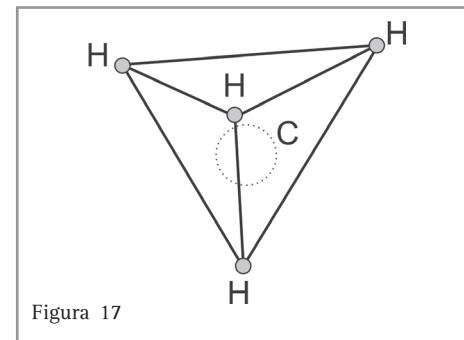
7

Durante muito tempo, no campo da Química, procuraram-se modelos para representar os átomos de elementos químicos. Era desejável que tais modelos, por meio de sua configuração espacial, pudessem descrever e explicar as propriedades desses elementos, como por exemplo, o tetraedro que representa o átomo de carbono.

O que você pensa sobre isso?

Você considera que um modelo desse tipo é algébrico, geométrico ou aritmético?

Figura 17

Esse modelo do átomo de carbono pode ser considerado como o esqueleto de um sólido – o tetraedro.

No caso da modelização, nem sempre os modelos construídos são suficientemente bons para responder às necessidades práticas. Por isso, as teorias têm que ser colocadas à prova: é a experiência validando o conhecimento construído.

A Matemática e suas questões internas

Quantas vezes você já deve ter feito a mesma pergunta que aparece na Figura 18, não é mesmo?

Muitas vezes aprendemos conceitos matemáticos que, à primeira vista, nada têm a ver com a realidade em que vivemos. Posteriormente, percebemos que eles serviram para construirmos novos conceitos e idéias matemáticas que têm grande aplicação em nossa vida.

Um exemplo interessante é o dos números complexos. É muito comum entrarmos em contato com esse tipo de número por meio de problemas que envolvem raiz quadrada de número negativo. Veja um problema famoso a seguir:

Figura 18

> *Descubra dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40.*

Esse problema foi objeto de estudo do matemático italiano Cardano, em 1545, que o considerou "manifestamente impossível, mas mesmo assim vamos operar".

A equação do segundo grau já era conhecida no tempo de Cardano: $ax^2 + bx + c = 0$ e a fórmula que a resolve também:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde a, b e c são números reais.

Cardano concluiu que a equação que resolvia esse problema é $x^2 - 10x + 40 = 0$ e que

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right) \text{ e } \left(5 - \sqrt{-15}\right)$$

eram soluções do problema. Entretanto considerou essas expressões inúteis, pois envolviam números para os quais ainda não tinha sido dado nenhum significado: a raiz quadrada de número negativo.

Nesse tempo, Bombelli, outro matemático italiano, resolveu operar com esses números, mesmo sem dar a eles um significado, imitando o procedimento que utilizava para operar com números reais.

Bombelli confirma, por exemplo, que a soma e o produto dos números e soluções do problema inicial são 10 e 40, respectivamente. Ele operou com esses números usando as mesmas regras e propriedades dos números reais que conhecia.

Desenvolvendo competências

8

Imitando Bombelli

Tente encontrar a soma e o produto abaixo:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)$$

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)$$

As raízes quadradas de números negativos continuaram a aparecer nos séculos XVI, XVII e XVIII. Os matemáticos manipulavam esses números sem saber o que significavam, tanto é que os nomes que tais números receberam na época descreviam bem esse desconforto: sofísticos, fictícios, impossíveis, místicos, sem sentido, imaginários (este último perdura até hoje).

O conjunto desses números só passou a "ter status de campo numérico" a partir dos trabalhos de Gauss, no final do século XVIII e início do século XIX, quando os números da forma $a+b\sqrt{-1}$, onde a e b são números reais, passaram a ser chamados de **números complexos** e a ser representados por um par ordenado de números reais (a, b), que admitia uma representação geométrica por um ponto no plano.

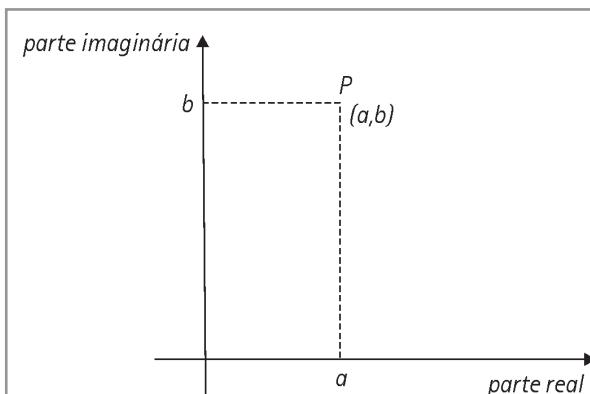



Figura 19

Desenvolvendo competências

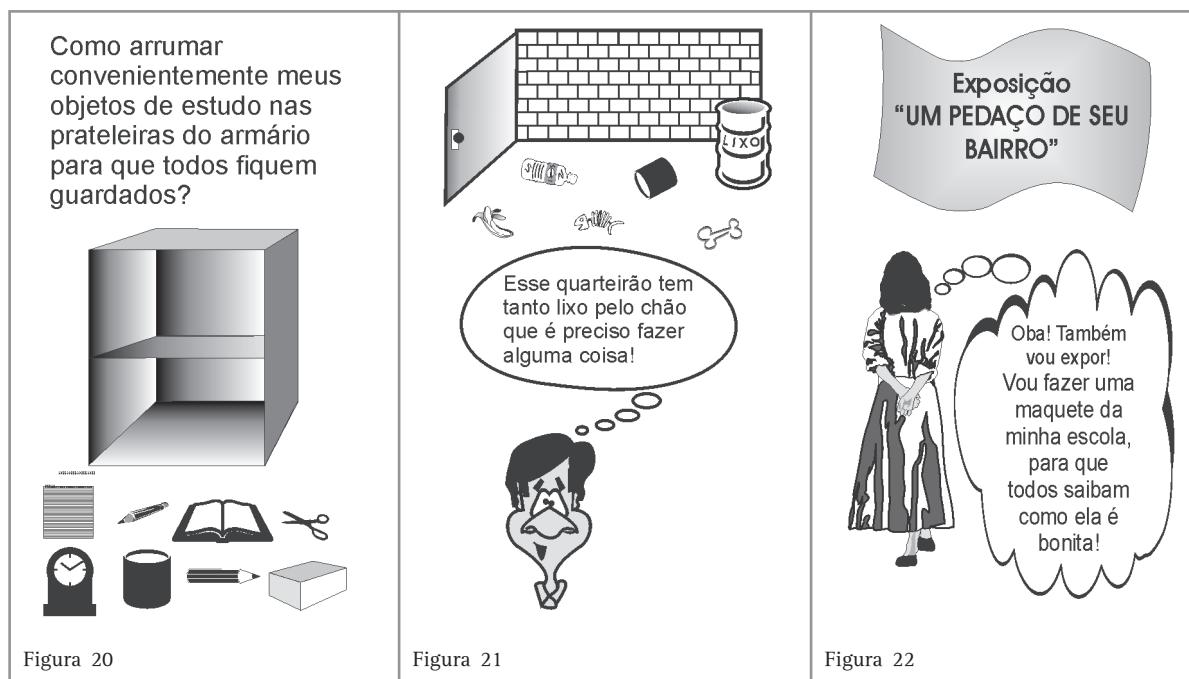
9

Você já operou com os números $\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)$ e $\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)$

Agora, represente-os por dois pontos no plano.

Antes, porém, escreva-os na forma $a+b\sqrt{-1}$ *e construa os dois eixos perpendiculares: o da parte real (onde você vai marcar o número a) e o da parte imaginária (onde você vai marcar o número b).*

Como você pode ver, a criação dos números complexos não se deveu a nenhum problema do cotidiano das pessoas, mas sim à necessidade de dar um significado a soluções de equações onde apareciam raízes quadradas de números negativos. E essa é uma questão interna à Matemática!

Aprender sobre os avanços da Matemática que surgiram em virtude da necessidade de resolver seus problemas internos, contribui para:

- desenvolver maneiras particulares de raciocinar.
- compreender como um conteúdo matemático de grande aplicação na realidade foi criado a partir de outro que, aparentemente, nada tem a ver com ela, mas somente como exercício do pensar.
- aumentar sua cultura.

Usando a Matemática para modificar o mundo

A todo momento convivemos com uma grande quantidade de objetos, fatos e informações de procedências e naturezas diversas. Por isso, precisamos compreendê-los, analisá-los, relacioná-los e, muitas vezes modificá-los, para tornar melhor a realidade em que vivemos.

Os exemplos são tantos, que tropeçamos neles em nosso dia-a-dia, desde os mais simples, até os mais complexos:

Figura 20 Figura 21 Figura 22

Você pode notar que essas três situações são de caráter muito diferente.

Arrumar os objetos no armário demanda de você uma habilidade em ocupar o espaço de modo conveniente para que todos os objetos caibam.

Mas não só isso. É possível que você queira colocar na prateleira de cima os objetos que usa para escrever (lápis, caderno e livro) e na de baixo os que não utiliza para esse fim (relógio, tesoura, caixinhas). Isso mesmo, você classifica os objetos de acordo com o critério que mais lhe interessa.

Já a questão do lixo é mais complexa, pois sua solução não depende apenas de você! Que tal uma campanha de conscientização entre as pessoas que moram no seu quarteirão? Como fazer isso? Seria bom fazer uma coleta seletiva? As pessoas sabem o que é isso?

Afinal, o que a Matemática tem a ver com o lixo?

Ora, uma campanha de conscientização sobre a coleta do lixo pode ser feita com as pessoas que moram em seu quarteirão. Ela pode ser desenvolvida em várias etapas, como, por exemplo:

Um grupo de vizinhos interessados em solucionar o problema pode se organizar para fazer essa campanha.

Fazer um levantamento:

- do tipo de lixo que é jogado nas ruas (observando as ruas todos os dias, durante um certo período estipulado pela equipe, recolhendo e anotando o lixo encontrado: papéis, casca de frutas, embalagens, garrafas etc). Para fazer essa coleta, o grupo de vizinhos deve se munir de luvas de borracha, sacos de lixo de 20 litros marcados com cores diferentes (azul

para papel; verde para vidro; amarelo para latas; vermelho para plásticos; branco para lixo orgânico).

- de como é feita a coleta de lixo nesse quarteirão (por caminhão coletor, por cada morador que queima seu lixo ou leva-o para um depósito comunitário etc.);
- sobre o conhecimento que as pessoas têm sobre coleta seletiva e se praticam a coleta seletiva;
- sobre os insetos mais freqüentes nas casas desse quarteirão e na parte externa às moradias;

O grupo de vizinhos poderá encontrar outros itens que considerar mais convenientes.

De posse desses dados, o grupo poderá arrumá-los em tabelas, poderá também confeccionar gráficos para a conscientização dos moradores do quarteirão, como, por exemplo:

Em relação ao hábito de jogar lixo na rua, a Tabela 1 apresenta o nº de moradores em cada situação:

	Tipo de lixo				
Joga	*papel*	*vidro*	*lata*	*orgânico*	*plástico*
freqüentemente	34	2	24	13	6
raramente	12	0	15	8	10
nunca	44	88	51	69	74

Tabela 1

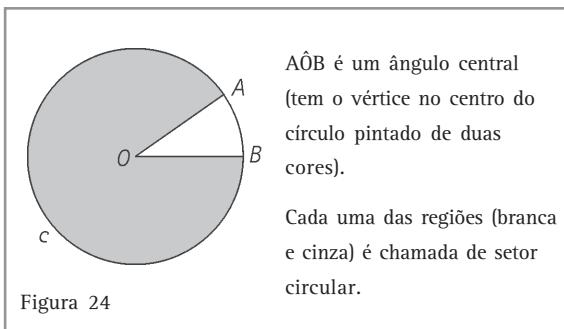
Em relação ao conhecimento e à prática da coleta seletiva de lixo, a Tabela 2 apresenta o nº de moradores em cada situação:

Coleta seletiva de lixo	*Pratica*	*Não pratica*
Conhece	10	15
Não conhece	1	64

Tabela 2

Em relação ao tipo de lixo e à quantidade encontrados nas ruas durante um certo período (por exemplo, 1 semana):

Tipo de lixo	*Quantidade*	*Local*
Papel	2kg	Sarjeta
Vidro	1kg	Portas de casas
Latas de bebida	3kg	Sarjeta, calçadas
Orgânico (restos de alimentos, folhas, animais mortos etc)	3kg	Sarjeta, calçadas, rua porta de casa
Plástico	1kg	Sarjeta, esquinas

Tabela 3

A elaboração das tabelas favorecerá:

- a observação de semelhanças e diferenças entre os materiais coletados e, portanto, favorecerá os processos de classificação para a realização de coleta seletiva.
- a tabulação e análise de dados. Na coleta encontrou-se um número muito maior de latas do que garrafas de vidro. A que se deve esse fato? Na pesquisa, percebeu-se que o hábito de jogar papel e latinhas de refrigerante ou cerveja ainda é muito forte entre os moradores desse quarteirão. O que se poderia fazer a respeito?
- os cálculos que por ventura devam ser feitos para, por exemplo, fazer previsões: se cada garrafa coletada pesa em média 300g e cada lata 50g, quantas garrafas e quantas latas foram coletadas na semana? Se os sacos de lixo utilizados na coleta suportam em média 20kg, de quantos sacos vamos precisar para a próxima semana de coleta?
- a observação de regularidades. A tabela anterior mostra que é na sarjeta que se encontra a maior diversidade de lixo.
- a verificação de quantos moradores estão envolvidos, direta ou indiretamente, na coleta de lixo do quarteirão em questão: na primeira tabela é fácil perceber que são 90 essas pessoas.
- a previsão sobre as medidas que deverão ser tomadas para conscientizar as pessoas que não conhecem ou não praticam a coleta seletiva (ao todo 80 moradores do quarteirão). Essas medidas podem ser de vários tipos: folhetos explicativos, reuniões com os moradores do quarteirão, visitas do grupo de pesquisa a cada casa do quarteirão para explicar sobre a coleta de lixo etc.

Figura 23

- a confecção de gráficos que possam, por meio do impacto visual, mostrar aos moradores do quarteirão o problema do lixo de forma imediata. Um cartaz como o seguinte (Figura 23) nos mostra que os moradores do quarteirão precisam ser informados sobre o que é a coleta seletiva e suas vantagens.

Para confeccionar um gráfico desse tipo (gráfico de setores), você precisa mobilizar conhecimentos sobre:

- ângulo, ângulo central.
- setor circular.
- proporcionalidade (entre ângulo central do setor e o número de moradores que não conhecem ou não praticam coleta seletiva do lixo).

AÔB é um ângulo central (tem o vértice no centro do círculo pintado de duas cores).

Cada uma das regiões (branca e cinza) é chamada de setor circular.

Figura 24

Veja como é possível fazer isso.

Dentre os 90 moradores pesquisados, 80 não conhecem ou não praticam a coleta seletiva. Isso pode ser registrado assim:

$$\frac{80}{90} = 0,8888... \cong 88,8\%$$

ou seja, 88,8% dos moradores não conhecem ou não praticam coleta seletiva.

O setor circular que corresponde a 88,8% do círculo é determinado por um ângulo central que deve medir 88,8% de 360° , que é 0,888 . 360° ≅ 320°.

O valor que se obtém com a calculadora é 319,68°, que aproximamos para 320°, para facilitar a confecção do gráfico com um transferidor.

Caso o elaborador do gráfico disponha de um microcomputador e de um programa que faça gráficos, tudo fica bem mais fácil. É só alimentar o programa com os dados obtidos na pesquisa que o gráfico sai prontinho!

De posse de todo esse material, o grupo de vizinhos que fez a pesquisa poderá discutir com os demais moradores sobre a questão do lixo daquele quarteirão, no sentido de conscientizá-los a não jogar lixo nas ruas, a praticar a coleta seletiva e, quem sabe, a ampliar esse projeto para outros quarteirões do bairro.

Eis aí um grupo de vizinhos que usou a Matemática para modificar as condições de sua realidade, de seu mundo!

Você também pode fazer isso!

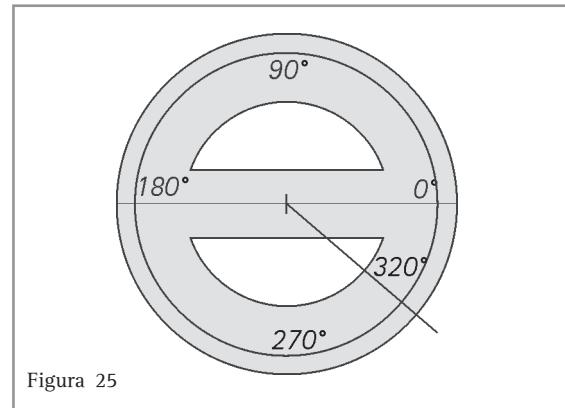



Figura 25

Dica:

Comece por reduzir o consumo. Aproveite produtos que usualmente não costuma utilizar (como, por exemplo, as folhas da beterraba para fazer um refogado ou as cascas do abacaxi para um refresco) e depois, sempre que possível, reutilize as embalagens. Com isso, você estará combatendo o aumento do lixo, o que facilitará, posteriormente, a reciclagem.

Para você intervir em sua realidade

Você também pode fazer uma campanha de esclarecimento junto à sua comunidade sobre a **redução – reutilização – reciclagem** do lixo.

O levantamento de dados sobre essas ações pode ser obtido mediante um questionário que seria aplicado às pessoas da comunidade, alvo da tal campanha.

Para que essa comunidade se conscientize da importância da **redução – reutilização – reciclagem** do lixo, é importante que os resultados de sua pesquisa sejam mostrados e analisados por elas; nesse caso, nada melhor do que um gráfico para que percebam clara e imediatamente em que situação se encontram diante do problema e decidam que atitudes tomar para eliminá-lo.

Então, combine com alguns amigos interessados nas vantagens da redução-reutilização-reciclagem e da coleta seletiva do lixo para desenvolver um programa de conscientização em seu quarteirão, em seu bairro ou em sua escola, como o que foi descrito anteriormente.

Caso o grupo tenha algum outro tipo de interesse em promover mudanças em seu bairro, no quarteirão onde mora, no espaço em que trabalha ou nas instituições que freqüenta (igrejas, centros de saúde, por exemplo), é possível promovê-las nos mesmo moldes da “coleta do lixo”, com as devidas adaptações que o próprio grupo fará.

Alguns temas poderão ser escolhidos como motivo de um levantamento estatístico para ser o ponto inicial de tais mudanças:

- Interesse da comunidade em promover um sábado cultural, a cada mês, com os “artistas” da própria comunidade.
- A vacina contra a gripe e os idosos: funciona ou não?
- O período de lazer das crianças do bairro: quem, como e onde promovê-lo e organizá-lo?
- O trabalho voluntário: uma opção para qualquer pessoa.

Mãos à obra!

Fazendo uma maquete

É claro que quando se quer modificar o mundo a nossa volta é preciso pensar não só na Matemática, mas também muito além dela: em outras áreas do conhecimento. Por exemplo, iniciar uma campanha de esclarecimento sobre o lixo leva as pessoas envolvidas a buscar conhecimentos sobre desvantagens do lixo a céu aberto, processos de coleta, de reciclagem, vantagens e desvantagens da reciclagem, como reaproveitar o material reciclado, como recolocá-lo no mercado para o consumo, etc. Muito provavelmente, a Física, a Química, a Biologia, a Sociologia e a Economia são campos do conhecimento que contribuirão para que essa campanha tenha sucesso.

Se a Matemática tem algo a ver com o problema do lixo o que dizer sobre sua relação com a exposição da qual a menina deseja participar?

Como a Matemática pode ajudar a garota a externar esse sentimento de prazer e orgulho de ser aluna de uma escola que ela considera bonita?

Para começar seu projeto, a menina foi medir o terreno de sua escola e a altura, comprimento e largura do prédio. Percebeu que seria difícil, pensou até em providenciar um teodolito para imitar o topógrafo quando vai encontrar o ângulo de visada e, com sua tangente, determinar a altura do prédio. Entretanto, não foi necessário.

Como havia um terraço no alto desse prédio, foi ajudada por alguns colegas: enquanto segurava a ponta do barbante do alto do terraço do prédio, um colega cortava o barbante no ponto em que ele atingia o chão e depois mediu o barbante. Para medir a largura e comprimento é mais fácil, pois pode-se fazer todas essas medições no chão mesmo.

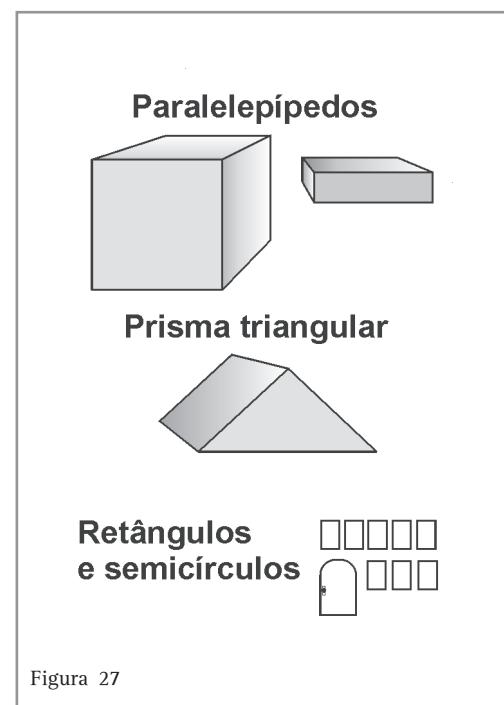
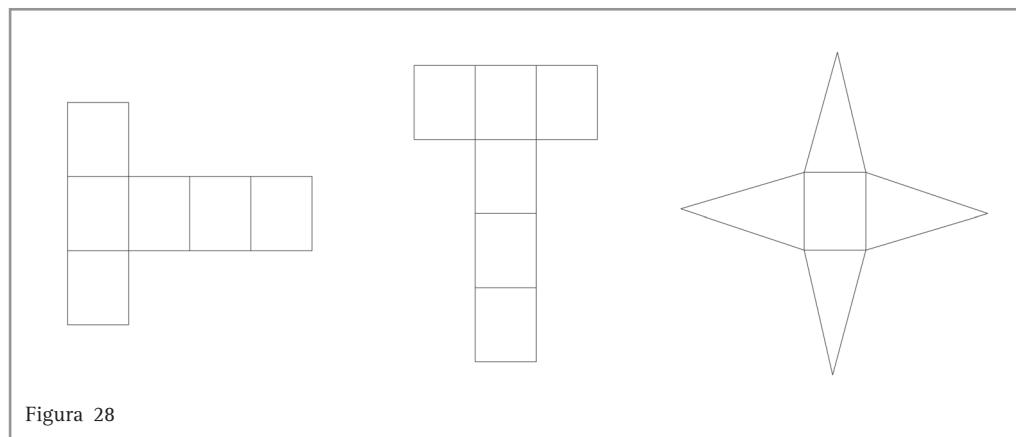
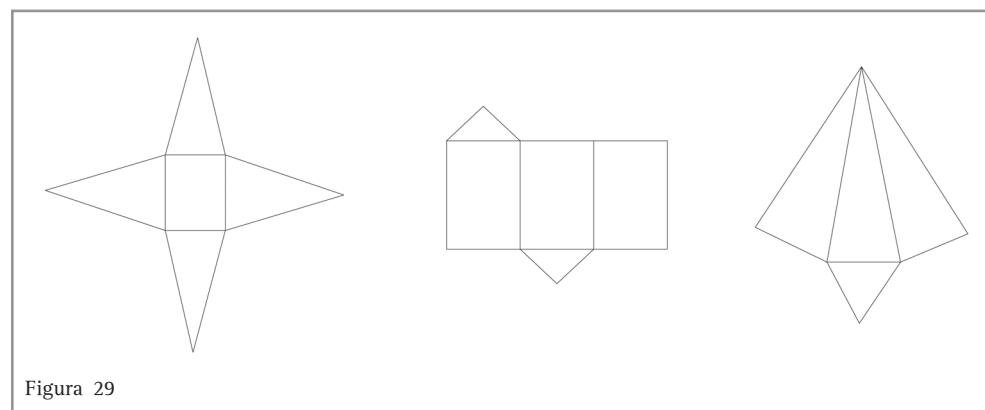
Figura 26

Depois de tanto trabalho alguém lhe deu a idéia de procurar a planta do prédio da escola na Prefeitura e foi o que ela fez. Com a planta na mão, resolveu fazer uma maquete de tal maneira que a relação entre as medidas da maquete e as medidas reais deveriam estar na razão 1: 50, isto é, cada centímetro de comprimento na maquete representava 50 cm na realidade ou cada 2 cm correspondia a 1 m.

Fez sua maquete em cartolina, com uma base de papelão. Construiu um paralelepípedo para representar o prédio principal, com as medidas adequadas e outro para representar a cantina. Não esqueceu de um prisma triangular para o telhado da cantina. Recortou vários retângulos para as janelas e parte da porta e um semicírculo para o alto da porta. Com arame fino fez os enfeites do terraço do telhado, que foram fixados em pequenos prismas de isopor.

Figura 27

A exposição foi um sucesso e a menina chamou a atenção dos visitantes para sua escola que, durante tantos anos, havia passado despercebida pelos moradores do bairro, menos para as crianças, professores e funcionários que lá trabalhavam. Muitas pessoas se interessaram em saber se nessa escola havia trabalho voluntário das pessoas da comunidade, se a escola recebia os moradores do bairro para oferecer cursos de alfabetização de adultos, de atendente de enfermagem etc, etc, etc.

A partir desse dia, professores, alunos e demais funcionários dessa escola, juntamente com pessoas da comunidade, resolveram desenvolver um projeto de caráter sócio-educativo a cada ano. O primeiro foi o de alfabetização de adultos.

Desenvolvendo competências

10

Como será que a menina fez?

a) Se o prédio principal da escola tem 10 m de altura, 12 m de comprimento e 8 m de largura, quais as medidas desse prédio na maquete?

b) Dos moldes abaixo qual você acha que a menina utilizou para fazer o prédio da escola?

Figura 28

c) E para fazer o telhado da cantina?

Figura 29

d) Quantos cm² de cartolina a menina gastou na confecção do prédio da escola em sua maquete?

Terminando...

Nestas poucas páginas, você teve a oportunidade de refletir sobre a Matemática como uma ciência que foi e continua sendo construída pela humanidade, não só em decorrência de problemas que surgem em muitas situações de nossa realidade, mas também por solicitação de outros campos do conhecimento e por questões internas à própria Matemática.

Você deve ter notado também que os problemas que resolvemos em nosso cotidiano têm caráter

interdisciplinar: ninguém sai de casa pensando "hoje vou resolver um problema de subtração para calcular o troco, quando fizer as compras no supermercado".

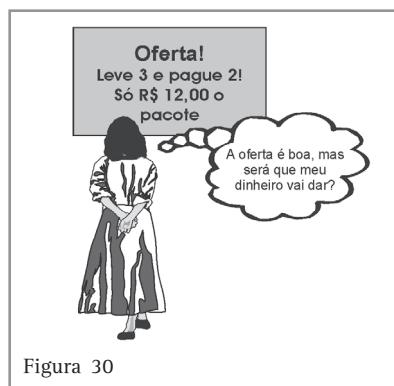



Figura 30

Muito provavelmente, além do troco, é preciso fazer estimativas, para ver se o dinheiro disponível para as compras será suficiente ou se a data de validade é conveniente, tendo em vista o ritmo de consumo do comprador em relação ao produto que está querendo comprar.

Um comprador também precisa estar atento, na hora da compra, para o que é mais vantajoso em termos de preço: uma embalagem de molho de tomate de 350 ml por R$ 2,80, ou outra, da mesma marca, de 500 ml por R$ 3,80?

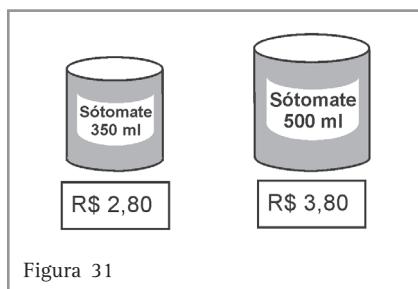



Figura 31

Além disso, é preciso decidir por uma ou outra marca de um produto; é preferível comprar um produto de marca comprovadamente idônea do que de outra, desconhecida, da qual não sabemos a procedência dos artigos utilizados na confecção do produto e os cuidados com seu preparo.

Não podemos esquecer também que, ao escolhermos este ou aquele supermercado para fazermos as compras, temos que levar em conta o que sabemos sobre a higiene do estabelecimento, seus procedimentos de estocagem, o tratamento que os funcionários dispensam aos fregueses, etc. Enfim, o problema das compras, como muitos e muitos problemas que resolvemos a todo momento em nossa vida, não se limita a um único campo do conhecimento humano.

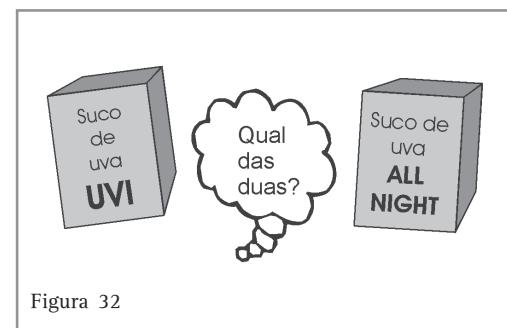



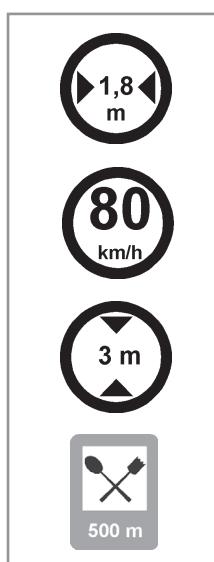
Figura 32

Afinal...
Por que a Matemática é importante?

- Por ser útil como instrumentador para a vida.
- Por ser útil como instrumentador para o trabalho.
- Por ser parte integrante de nossas raízes culturais.
- Porque ajuda a pensar com clareza e a raciocinar melhor.
- Por sua própria universalidade.
- Por sua beleza intrínseca como construção lógica, formal etc.

Texto adaptado de: D´AMBRÓSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, c1990. 88 p. (Fundamentos; v. 74)

Desenvolvendo competências

11 *E você o que acha?*
O que é mais vantajoso: comprar uma embalagem de molho de tomate de 350 ml por R$2,80 ou outra, da mesma marca, com 500ml por R$3,80?

Conferindo seu conhecimento

2

1 - f(n) = 1,20 . n + 3,50

2 - A=10 . l

3

Você e as placas de trânsito

Largura máxima 1,8m
Medida
Grandeza medida: comprimento

Velocidade máxima permitida: 80km/h
Medida
Grandeza medida: velocidade

Altura máxima: 3m
Medida
Grandeza medida: comprimento

Restaurante a 500m
Medida
Grandeza medida: comprimento

4

a) Entre 1996 e 2001, o número de demitidos nem sempre cresceu. Ele diminui de 1998 para 1999 e de 2000 para 2001.

b) De 1996 a 1998 foram demitidos 75 + 96 + 134 = 305 policiais corruptos.

De 1996 a 2001 foram demitidos 797 policiais corruptos. Logo, $\frac{305}{797} \cong 0{,}38 = 38\% \neq 50\%$

5

Agora é com você:

De 1996 a 2001 foram demitidos 75 + 96 + 134 + 131 + 189 + 172 = 797 policiais corruptos.

6

Para você desvendar uma construção estranha:

Como as duas figuras são compostas pelas mesmas peças, então deveriam ter mesma área.

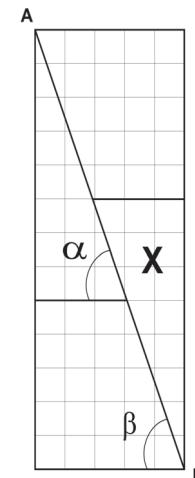
Área da Figura 33 = 64

Área da Figura 34 + 65

Figura 33

$tg\,\alpha = \frac{8}{3} = 2,66...$

$tg\,\beta = \frac{5}{2} = 2,5$

} *logo, α e β não são iguais, porque suas tangentes são diferentes*

Assim, o segmento AB não é um segmento na verdade, já que AX e XB têm inclinações diferentes. Nessa Figura 34 o que ocorre é que as quatro peças não se juntam no meio, mas ficam dispostas como ao lado.

O primeiro □ de área extra é a área do paralelogramo sombreado, que na Figura 34 está exagerada. Fazendo as peças num quadriculado de 2cm x 2cm já se pode notar o paralelogramo.

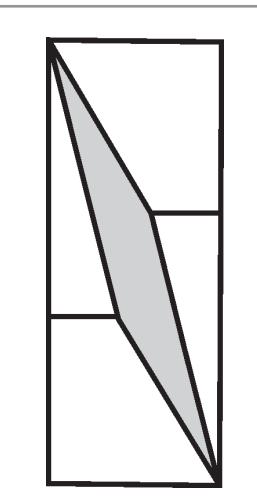



Figura 34

7

O modelo para descrever o átomo de carbono é de caráter geométrico.

O tetraedro associado a esse modelo é um poliedro: sólido, cuja superfície sempre pode ser decomposta num número finito de partes planas e poligonais (as faces).

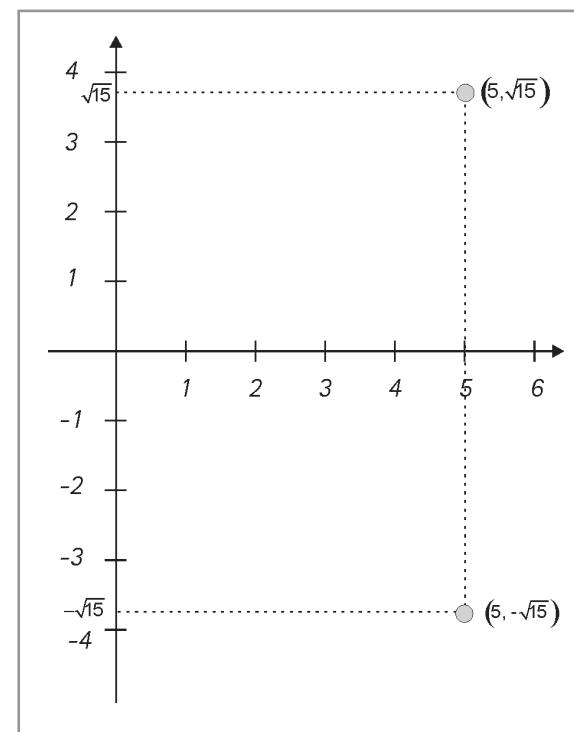
8

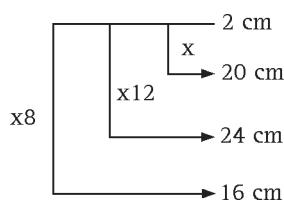
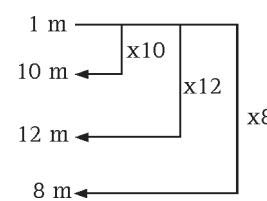
Imitando Bombelli:

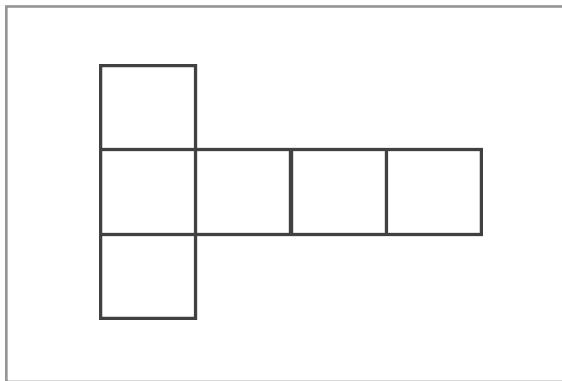
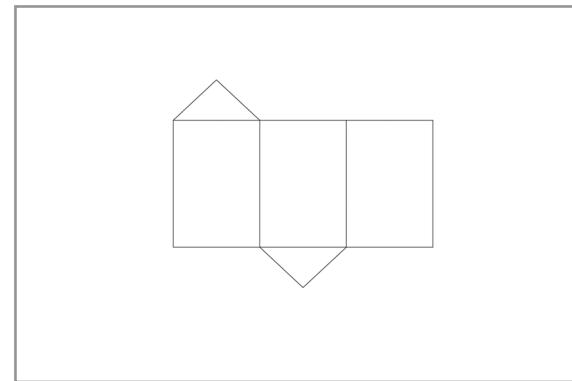
$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)=(5+5)+\left(\sqrt{-15}-\sqrt{-15}\right)=10+0=10$$

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)=5^2-\left(\sqrt{-15}\right)^2=25-(-15)=25+15=40$$

9 *Registrando os números na forma* $a + b\sqrt{-1}$*:*

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)=5+\underbrace{\sqrt{15}}\cdot\sqrt{-1}$$

$\uparrow$ *a* $\uparrow$ *b*

Representando-os no plano cartesiano

Como você viu, os números complexos podem ser postos na forma $a + b\sqrt{-1}$*, onde a e b são números reais. Nesse caso, quando* ***b = 0,*** *o número fica reduzido a* ***a*** *que indica simplesmente um número real. Isso significa que todo número real é um número complexo da forma* $a + 0\sqrt{-1}$**.**

10

a) Na maquete, o prédio deverá ter 20 cm de altura, 24 cm de comprimento e 16 cm de largura.

Na maquete

No prédio

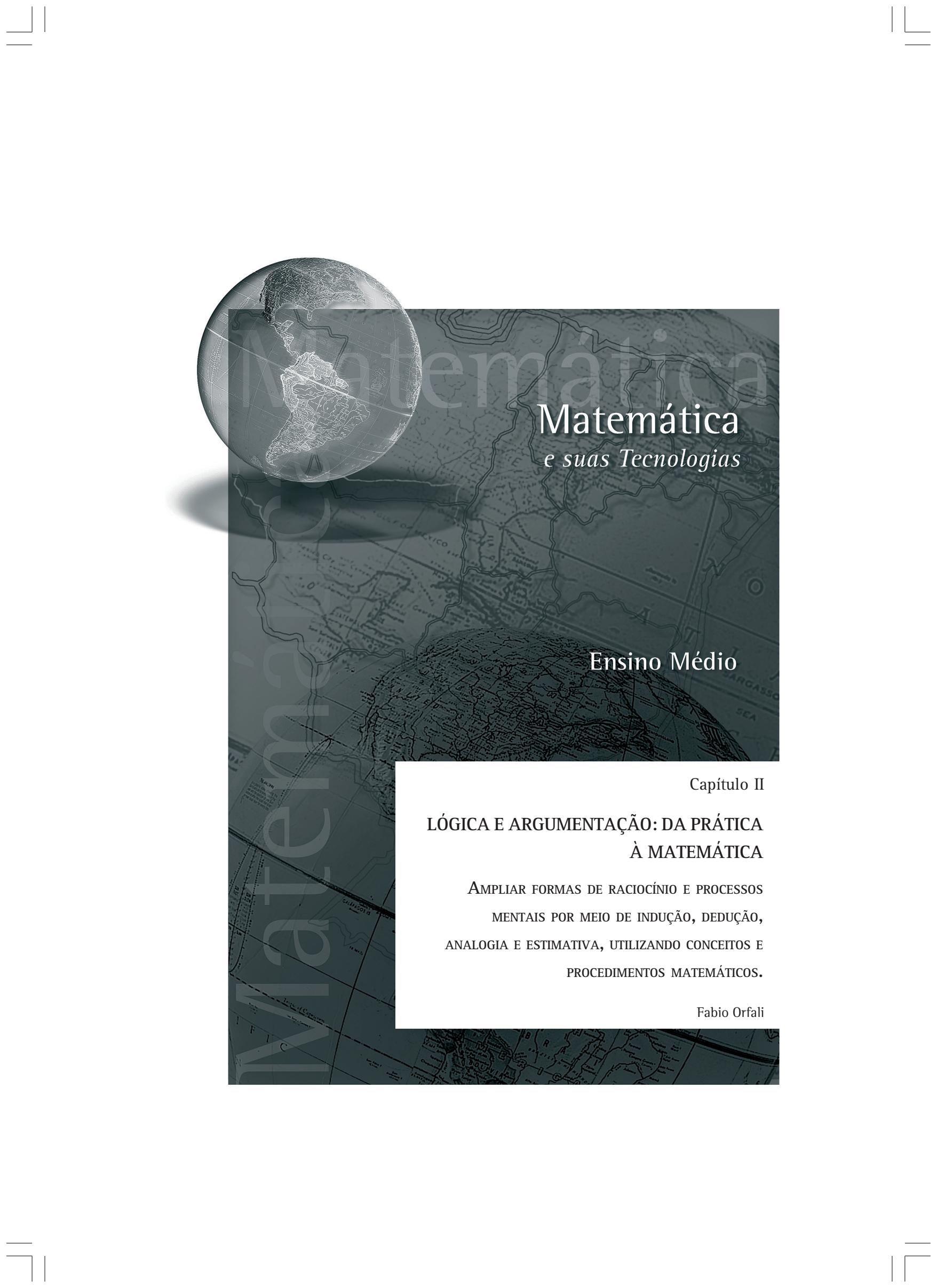
b) Molde do prédio da escola

c) Molde do telhado da cantina

d) A menina gastou 2 . 24 . 20 + 2 . 24 . 10 + 2 . 20 . 10 = 1.840cm² de cartolina.

11

E você, o que acha?

Efetuando-se R$2,80 : 350 ml obtém-se R$0,008 por 1ml de molho.

Efetuando-se R$3,80 : 500ml obtém-se R$0,0076 por 1ml de molho.

Então o molho mais barato é o segundo, o da embalagem maior.

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar e interpretar, a partir da leitura de textos apropriados, diferentes registros do conhecimento matemático ao longo do tempo.
- Reconhecer a contribuição da Matemática na compreensão e análise de fenômenos naturais, e da produção tecnológica, ao longo da história.
- Identificar o recurso matemático utilizado pelo homem, ao longo da história, para enfrentar e resolver problemas.
- Identificar a Matemática como importante recurso para a construção de argumentação.
- Reconhecer, pela leitura de textos apropriados, a importância da Matemática na elaboração de proposta de intervenção solidária na realidade.

Capítulo II

LÓGICA E ARGUMENTAÇÃO: DA PRÁTICA À MATEMÁTICA

AMPLIAR FORMAS DE RACIOCÍNIO E PROCESSOS MENTAIS POR MEIO DE INDUÇÃO, DEDUÇÃO, ANALOGIA E ESTIMATIVA, UTILIZANDO CONCEITOS E PROCEDIMENTOS MATEMÁTICOS.

Fabio Orfali

Capítulo II

Lógica e argumentação: da prática à Matemática

Argumentação

Você já pensou no que existe em comum entre uma propaganda de certo produto na televisão, um artigo do editorial de um jornal e um debate entre dois políticos? Essas situações podem parecer bem diferentes, mas, se você analisar com cuidado, verá que, nos três casos, basicamente, tenta-se convencer uma ou mais pessoas de determinada idéia ou teoria.

Os criadores do comercial procuram convencer o público de que aquele produto é melhor do que o de seus concorrentes. O jornalista que escreve um artigo defende seu ponto de vista sobre um acontecimento do dia anterior e procura convencer os leitores de que suas idéias são as mais corretas. Já cada um dos políticos tenta mostrar aos eleitores que possui melhores condições de ocupar determinado cargo público do que seu adversário.

Mas como convencer alguém, ou nós mesmos, de que determinada idéia é, de fato, correta? É necessário que sejam apresentados fatos que justifiquem aquela idéia. Esses fatos são chamados de **argumentos**. Eles devem ser bem claros, ter uma relação lógica entre si, de tal maneira que a idéia considerada seja uma conseqüência natural dos argumentos apresentados.

Nem sempre, porém, isso ocorre. Muitas vezes, a argumentação não é feita de modo consistente e o resultado é que aquela idéia acaba não sendo aceita pelas outras pessoas. Observe o exemplo a seguir:

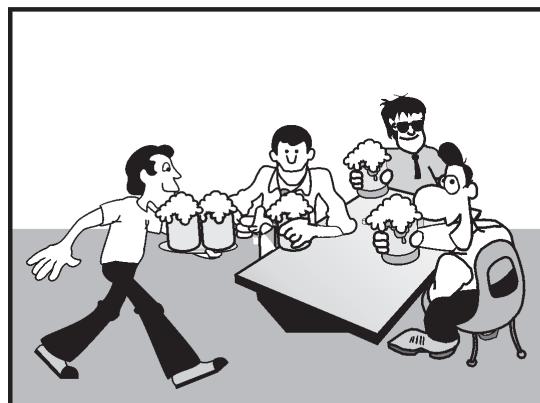



Figura 1

Você acha que o argumento utilizado pelo marido para justificar seu atraso está consistente?

Você já percebeu o quanto a argumentação é importante no dia-a-dia das pessoas? Observe que utilizamos argumentos para convencer nosso chefe de que merecemos um aumento, para convencer nossa namorada, ou namorado, a ir ao cinema quando ela, ou ele, preferia ficar em casa, e em diversas outras ocasiões. De uma boa argumentação pode mesmo depender o resultado de uma entrevista para se conseguir um novo emprego.

Mas afinal como a matemática se relaciona com tudo isso? Já discutimos que a capacidade de argumentar é uma habilidade extremamente importante ao ser humano. Ora, os resultados de uma teoria matemática só são aceitos mediante uma argumentação rigorosamente correta. É o que os matemáticos chamam de **demonstração**. Assim, no estudo da matemática, as regras do raciocínio lógico devem ser muito bem conhecidas e analisadas, o que leva ao aprimoramento de nossa capacidade de argumentar, mesmo em situações fora da matemática.

Observe a história abaixo:

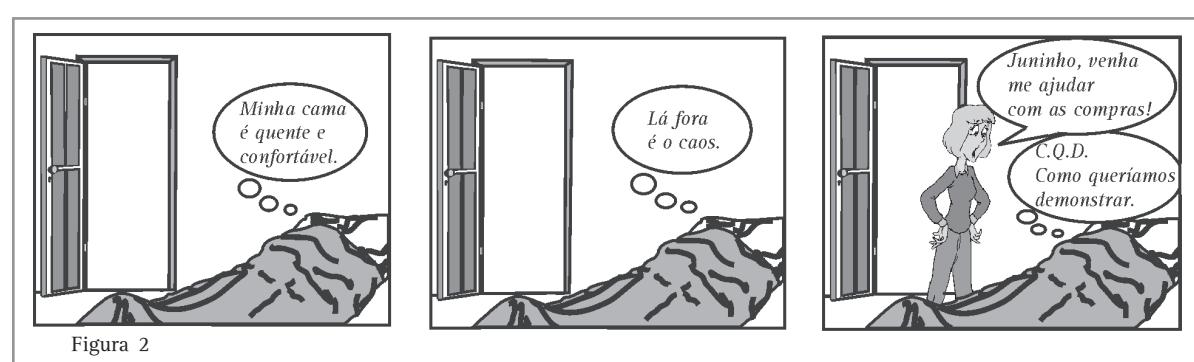



Figura 2

A expressão utilizada por Juninho (*CQD- como queríamos demonstrar)* foi "emprestada" da Matemática. Ela normalmente é usada ao final de uma demonstração, quando os argumentos expostos já são suficientes para comprovar a afirmação que foi feita inicialmente.

Assim, o menino fez duas afirmações, querendo dizer que na sua cama o ambiente está tranqüilo, aconchegante e fora dela a situação é ruim, confusa. Neste instante, a mãe grita, pedindo auxílio com as compras. Ora, como alguém pode preferir guardar compras a uma cama quente e confortável? Para Juninho, essa é uma prova de que lá fora é o caos. Por isso, na sua opinião, aquele era um argumento que demonstrava suas afirmações iniciais.

Muitas vezes, na vida real, usamos apenas um fato para demonstrar que nossas idéias são verdadeiras. Em certas ocasiões isso é aceitável, em outras não.
Observe os exemplos abaixo:

- **Não disse que aquele time não era bom? Após 25 jogos, ele foi derrotado no último domingo.**
- **Não disse que aquele político era desonesto? Foi comprovado pela polícia seu envolvimento com o crime organizado.**

As duas argumentações baseiam-se em apenas um fato. Em sua opinião, qual dos argumentos é o mais razoável?

No ambiente científico, porém, as regras são bem mais rígidas. Uma afirmação não pode ser comprovada baseando-se em apenas um fato. E esse rigor está muito presente na matemática, de onde tiraremos vários exemplos analisados neste capítulo. Observe o diálogo abaixo:

Paulo: Todo número elevado ao quadrado é igual ao seu dobro.

Cláudia: Como você pode comprovar isso?

Paulo: Veja só: o quadrado de 2 é 2^2 = 4 e o dobro de 2 também é 4.

Encontre um exemplo que mostre que a primeira afirmação feita por Paulo é falsa.

Está vendo? Neste caso pode até ter sido fácil encontrar um exemplo mostrando que a afirmação acima não é verdadeira. Observe que o quadrado de 3 é 3^2 = **9**, mas o dobro de 3 é

2 x 3 = **6.**

Existem outros casos, porém, em que certo comportamento pode ser observado em muitos números diferentes, o que nos dá vontade de dizer que ele ocorre com **todos** os números. Cuidado! Em Matemática, analisar apenas alguns exemplos não é suficiente para comprovar uma propriedade, pode no máximo nos dar uma "pista" de que aquela propriedade possa ser verdadeira.

Vamos mostrar um outro exemplo, para ressaltar ainda mais a importância desse fato:

Considere três retas r, s e t que se cruzam num único ponto P. É possível que r e s sejam perpendiculares e, ao mesmo tempo, r e t sejam perpendiculares?

(Lembre que retas perpendiculares são aquelas que se cruzam formando ângulos retos, como mostra a Figura 3.)

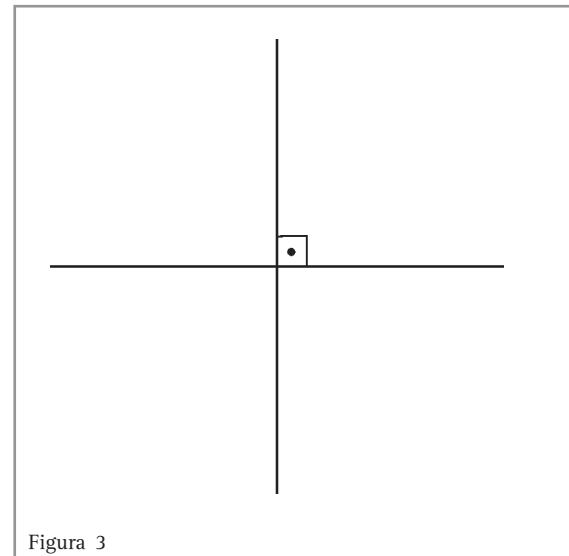
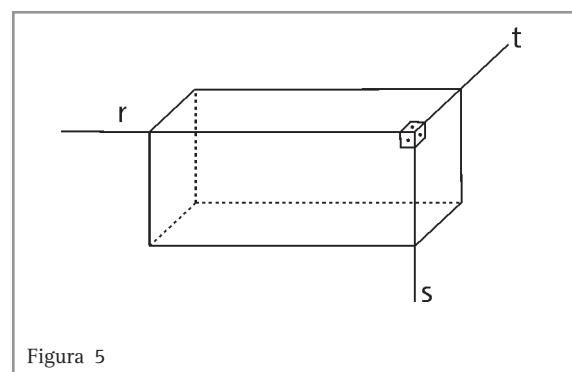
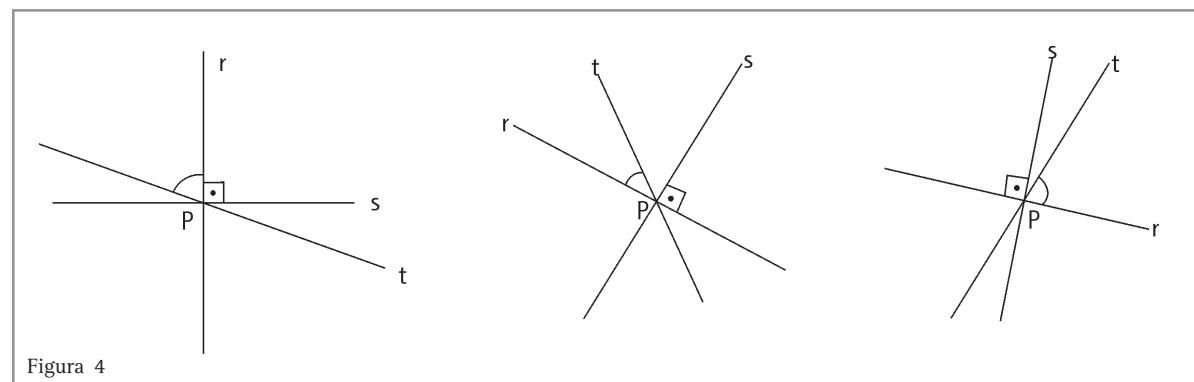



Figura 3

Tente pensar nesse problema antes de ler a solução. Uma boa dica é utilizar modelos para representar as retas como, por exemplo, três canetas, colocando-as em diferentes posições e observando se, em alguma delas, uma das canetas fica perpendicular, ao mesmo tempo, às outras duas.

Ao tentar resolver esse problema, Carlos não utilizou modelos: foi fazendo diversos desenhos, imaginando a situação sugerida no enunciado. No entanto, depois de desenhar as retas **r** e **s** perpendiculares, nunca conseguia uma posição para a reta **t**, de tal modo que ela também ficasse perpendicular a **r**. Observe alguns desses desenhos:

Muitos desenhos depois, sempre sem sucesso, Carlos finalmente concluiu: “Não é possível obtermos três retas **r**, **s** e **t** nas condições do problema. Os desenhos anteriores comprovam essa conclusão.”

Ao utilizar apenas desenhos, Carlos não visualizou todas as situações possíveis para as retas. Com as canetas, você enxergou possibilidades diferentes das de Carlos? Você concorda com o argumento utilizado em sua conclusão?

Dias depois, olhando uma caixa de sapatos, Carlos finalmente visualizou uma solução para o problema: conseguiu enxergar, sobre a caixa, três retas que se cruzavam em um ponto e eram perpendiculares entre si!

Figura 4

Figura 5

Se você não encontrou a solução do problema com as canetas, pegue uma caixa com o mesmo formato de uma caixa de sapatos e tente encontrar a solução de Carlos para o problema.

Na Figura 5, você encontra uma caixa parecida com a utilizada por Carlos. Observe as retas *r*, *s* e *t* que passam por três arestas da caixa.

Note que Carlos, em seus desenhos, não considerou a possibilidade das três retas não estarem no mesmo plano. Assim, mesmo que fizesse muitos desenhos, não conseguiria visualizar a solução do problema. Então, sua argumentação inicial estava inválida do ponto de vista matemático: ele tirou uma conclusão baseando-se apenas em alguns desenhos, que não representavam todas as possibilidades.

Então não se esqueça: embora no nosso dia-a-dia façamos isto em algumas situações, em matemática não devemos generalizar uma afirmação baseando-nos em apenas alguns exemplos, sem buscar uma comprovação daquele fato por uma demonstração que englobe todas as possibilidades.

Desenvolvendo competências

1

1. Observe os seguintes cálculos efetuados entre números ímpares:

1 + 1 = 2   *3 + 3 = 6*
1 + 3 = 4   *3 + 5 = 8*
1 + 5 = 6   *5 + 5 = 10*

A partir apenas dos cálculos efetuados acima, você pode concluir que sempre que somamos dois números ímpares, obtemos como resultado um número par? Por quê?

2. Num torneio de basquete, seis equipes enfrentam-se entre si, num total de cinco rodadas. Se uma equipe vencer todas as suas partidas, é automaticamente declarada campeã. Caso contrário, as duas equipes com maior número de vitórias disputam uma final para decidir a campeã. A tabela abaixo mostra a posição de cada equipe, após a realização de três rodadas:

Equipe	Vitórias	Derrotas
I	1	2
II	0	3
III	2	1
IV	2	1
V	3	0
VI	1	2

Tabela 1

Pelas regras do torneio e pela análise da tabela pode-se afirmar que a:
a) equipe V será a campeã do torneio.
b) final do torneio será entre as equipes III e IV ou entre as equipes IV e V.
c) equipe V é a única que pode ser a campeã sem ter de jogar a partida final.
d) equipe I não pode mais ser a campeã do torneio.

Desenvolvendo competências

2

No último mês, o consumo de energia elétrica na residência de Jorge, apontado na conta de luz, teve um aumento significativo, subindo de 150 para 270 kWh. Como aparentemente não havia motivo para tal aumento, Jorge começou a desconfiar que o problema pudesse ser da companhia fornecedora de energia elétrica. Por isso, ele decidiu perguntar aos seus vizinhos se eles tinham tido problema semelhante ultimamente. A Tabela 2 mostra o que cada vizinho respondeu:

Casa	Consumo em março (kWh)	Consumo em abril (kWh)
1	220	210
2	100	330
3	180	210
4	230	360
5	90	250
6	200	160
7	180	410
Jorge	150	270

Tabela 2

1. Em quantas das 8 casas da rua de Jorge houve aumento do consumo de energia elétrica do mês de março para o mês de abril?

2. Das residências onde houve aumento do consumo, em quantas esse aumento foi maior do que 100 kWh?

3. Utilizando como argumento os números da tabela acima, você diria que a companhia fornecedora de energia elétrica:

a) certamente é a responsável pelo aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

b) provavelmente é a responsável pelo aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

c) provavelmente não tem relação com o aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

d) certamente não tem relação com o aumento do consumo de energia nas casas da rua de Jorge.

4. Jorge vai solicitar à companhia fornecedora de energia elétrica que verifique se há algum problema com a instalação elétrica de sua rua, que possa explicar o aumento do consumo de energia em algumas casas. Para isso, ele deve preencher um formulário, fazendo uma pequena justificativa de seu pedido. Escreva, em no máximo três linhas, essa justificativa, dando argumentos que convençam a companhia da necessidade de enviar um técnico à rua de Jorge.

Silogismos

Observe a frase abaixo, sobre a campanha de vacinação contra a paralisia infantil:

> **A vacina contra a Paralisia Infantil vai estar disponível nos postos de saúde até o dia 31 de agosto. Todas as crianças com menos de cinco anos de idade devem tomar a dose.**
>
> Fonte: http://www.saude.sc.gov.br

Flávia possui dois filhos: Pedro, de 7 anos, e Amanda, de 3 anos.

Considerando as afirmações acima, o que Flávia pode concluir? Ela deve levar seus dois filhos a um posto de saúde?

Como você pôde notar no exemplo acima, é muito comum, a partir de duas ou mais afirmações, tirarmos conclusões sobre um determinado assunto. Quando, porém, essas conclusões são válidas? Em outras palavras, será que existem maneiras que nos ajudem a decidir se a conclusão obtida realmente era uma conseqüência necessária das afirmações iniciais?

A resposta é sim: dentro daquilo que os matemáticos chamam de raciocínio formal, existem regras claras para decidir se um argumento é ou não válido. É muito útil trabalharmos alguns exemplos disso, que nos ajudem a melhorar nossas argumentações e a não aceitar certas argumentações completamente sem fundamentos.

Lembre-se sempre, porém, de uma coisa: a nossa vida cotidiana não exige tanta precisão quanto a matemática. Em algumas situações do dia-a-dia, certos raciocínios, embora não sejam rigorosamente corretos, são plenamente aceitáveis.

Observe o exemplo:

- **Júlio foi almoçar três sextas-feiras seguidas em um restaurante que foi inaugurado recentemente perto de seu trabalho. Nas três vezes, acabou passando muito mal do estômago. Concluiu que a comida do restaurante não lhe fazia bem e decidiu que não almoçaria mais naquele lugar.**

Embora, do ponto de vista matemático, a argumentação de Júlio não esteja rigorosamente correta (não podemos generalizar uma conclusão a partir de apenas três observações), você tomaria a mesma atitude que Júlio? Por quê?

Note que o fato de Júlio ter passado mal justamente nos três dias em que almoçou lá poderia ser uma coincidência. Como, porém, não se tratava de uma comprovação científica, baseada em argumentos rigorosos, Júlio preferiu não se arriscar e não voltou mais ao restaurante.

Vamos tentar agora obter uma conclusão baseando-nos em argumentos rigorosos.

Observe este exemplo:

- **Toda ave tem penas.**
- **As garças são aves.**

Que conclusão pode-se tirar a partir das duas afirmações acima?

Bem, se você respondeu que "as garças têm penas", então acertou. Se você não tinha chegado a essa conclusão, tente pensar por que ela está correta.

Note ainda que, no caso de Júlio, a conclusão era bem provável, mas não era necessariamente verdadeira. Já nesse exemplo, considerando as duas afirmações iniciais, a conclusão é obrigatoriamente verdadeira.

Este tipo de argumentação, composta de duas afirmações e uma conclusão, é conhecida como **silogismo** e foi muito estudada pelos filósofos gregos.

Observe agora o seguinte silogismo:

- **Todos os carros da marca X têm direção hidráulica.**
- **Alguns carros da marca Y têm direção hidráulica.**

Logo, alguns carros da marca X são da marca Y.

Note que a conclusão do silogismo é certamente inválida, pois um carro não pode ser ao mesmo tempo de duas marcas. Explique, nesse caso, por que, considerando as duas afirmações iniciais, a conclusão não é necessariamente verdadeira.

Observe agora este outro exemplo:

A direção de uma empresa decidiu que somente os funcionários que trabalham há mais de 10 anos na firma têm direito de solicitar ao setor de benefícios empréstimo para compra de casa própria. O funcionário mais antigo do departamento de compras trabalha na empresa há 7 anos.
Se o Sr. Odécio trabalha no departamento de compras, pode-se concluir que:

a) dentre os funcionários do departamento de compras, somente o Sr. Odécio não tem direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

b) somente os funcionários do departamento de compras não têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

c) não é possível saber se o Sr. Odécio tem direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria, pois não sabemos há quanto tempo ele trabalha na firma.

d) o Sr. Odécio e todos os demais funcionários do departamento de compras não têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

Na realidade, temos três afirmações iniciais e queremos, a partir delas, tirar uma conclusão:

1. **Somente** funcionários com mais de 10 anos na empresa têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria.

2. **Nenhum** funcionário do departamento de compras tem mais de 10 anos na empresa (pois o mais antigo tem 7 anos).

3. O Sr. Odécio trabalha no departamento de compras.

Usando as informações 2 e 3, concluímos que o Sr. Odécio trabalha na empresa há menos de 10 anos. Então, usando a informação 1, concluímos que ele não tem direito a solicitar empréstimo para compra da casa própria.

Note ainda que, usando as informações 1 e 2, podemos concluir que nenhum funcionário do departamento de compras tem direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria. Assim, concluímos que a alternativa correta é *d*.

Vamos analisar também a alternativa *b*. Pelo enunciado, não podemos afirmar com certeza se a afirmação está correta, pois podem existir outros funcionários com menos de 10 anos na empresa que não trabalham no departamento de compras e, portanto, não têm direito de solicitar empréstimo para compra de casa própria. Sendo assim, a afirmação não pode ser considerada correta.

Desenvolvendo competências

3

1. Numa escola particular, 20 das suas 100 vagas são reservadas a alunos que, por se destacarem nos estudos, não pagam mensalidade. Metade desses alunos participam do time de futebol da escola. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) Pelo menos 10 alunos da escola fazem parte do time de futebol.

b) Todos os integrantes do time de futebol da escola não pagam mensalidade.

c) Alguns alunos que pagam mensalidade fazem parte do time de futebol.

d) Metade dos integrantes do time de futebol não pagam mensalidade.

Desenvolvendo competências

4

O diagrama abaixo (Figura 6) mostra a distribuição dos alunos de uma escola de Ensino Médio nos cursos optativos que são oferecidos no período da tarde:

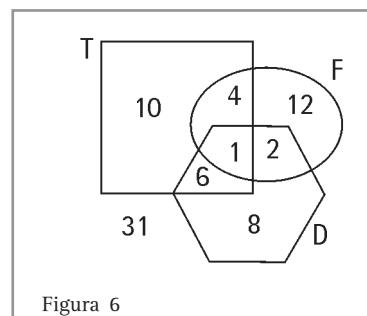



Figura 6

T: curso de teatro

F: curso de fotografia

D: curso de dança

Note que o diagrama mostra, por exemplo, que apenas 1 aluno freqüenta os três cursos ao mesmo tempo e que 31 alunos não freqüentam nenhum dos cursos optativos.

1. Deverá ser entregue um aviso por escrito a todos os alunos que freqüentam mais de um curso optativo. Assim, o número de alunos que receberá o aviso é igual a:

a) 30 b) 13 c) 12 d) 1

2. Os números de alunos matriculados nos cursos de teatro, de fotografia e de dança são, respectivamente:

a) 10, 12 e 8 b) 11, 7 e 9 c) 16, 18 e 20 d) 21, 19 e 17

Diagramas e problemas numéricos

Na atividade 4, nós utilizamos diagramas para representar as quantidades de alunos que freqüentavam cada um dos cursos optativos oferecidos pela escola. Vamos agora, usando diagramas, resolver outros problemas envolvendo quantidades numéricas.

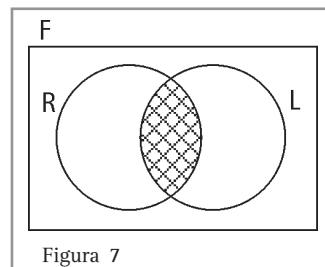
A associação de moradores de uma comunidade conseguiu verba para melhorar o centro de cultura e lazer existente em sua sede. Decidiu-se, então, fazer uma consulta aos membros da comunidade, para definir a melhor maneira de aplicar o dinheiro.

Cada uma das 250 famílias recebeu uma ficha com a seguinte pergunta: “Quais das opções abaixo a sua família considera importantes para o centro de cultura e lazer de nossa comunidade?” As opções de resposta eram:

- construção de um espaço de recreação e prática de esportes para crianças
- construção de uma sala para leitura e realização de palestras
- nenhuma das duas

Os dados da pesquisa, que foi respondida por todas as famílias, foram organizados na tabela abaixo:

Opção	*N° de respostas*
espaço para recreação e	*111*
esportes sala para leitura e palestras	*183*
nenhuma das duas	*24*

Tabela 3

Um líder comunitário, ao observar a Tabela 3 anterior, perguntou se muitas famílias se interessaram tanto pelo espaço para recreação e esportes quanto pela sala de leitura, pois, dependendo da quantidade,
eles poderiam pensar em adiar a compra de um computador para a associação, que estava programada, e construir as duas coisas.

A partir dos dados da tabela, é possível identificar quantas famílias se interessaram pelas duas obras, quantas apenas pelo espaço para recreação e quantas apenas pela sala de leitura?

Pode ser que, fazendo apenas algumas contas, você consiga responder à questão acima. Mas e se a pesquisa fosse mais complexa e o questionário envolvesse três opções, por exemplo?

Por isso, é bastante útil representarmos o problema acima com diagramas. Observe a Figura 7. Nela, **F** é o conjunto de todas as famílias, **R** é o conjunto das famílias que optaram pelo espaço de recreação e **L** o das que optaram pela sala de leitura. *Quais famílias estariam representadas na região quadriculada do diagrama?*

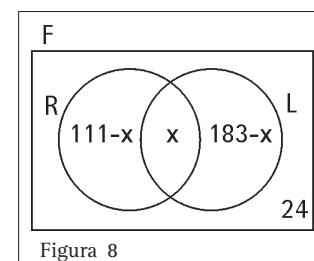



Figura 7

Observe que a região quadriculada na figura pertence tanto ao conjunto **R** quanto ao **L** e por isso é reservada às famílias que optaram pelas duas obras, pois isso era possível na pesquisa. Dizemos que essa região corresponde à intersecção dos dois conjuntos.

Há ainda uma região reservada às famílias que não se interessam por nenhuma das duas obras (dentro de **F**, mas fora de **R** e fora de **L**, ou seja, dentro do retângulo, mas fora dos dois círculos).

Para preenchermos o diagrama com dados numéricos, devemos começar pela região de intersecção, pois as outras regiões dependem dela. Como não conhecemos, no nosso problema, quantas famílias estão nessa região, chamamos esta quantidade de **x**.

Há **111** famílias que optaram pelo espaço para recreação. Destas, **x** também optaram pela sala de leitura. Então, **111 - x** são as que optaram **apenas** pelo espaço para recreação. Com o mesmo raciocínio, concluímos que **183 - x** optaram **apenas** pela sala de leitura. Como **24** não se interessaram por nenhuma das duas obras, nosso diagrama fica:

Figura 8

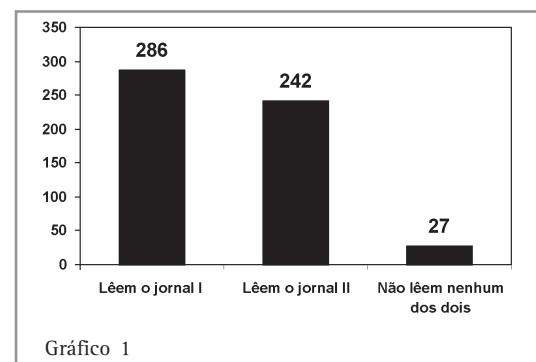
Como há 250 famílias na comunidade, a soma das quantidades das quatro regiões deve ser igual a 250. Obtemos, então, a seguinte equação:

$(111 - x) + x + (183 - x) + 24 = 250$

$318 - x = 250$

$-x = -68$

$x = 68$

Com isso, concluímos que 68 famílias estão interessadas pelas duas obras. Somente pelo espaço para recreação, existem 111 – 68 = 43 famílias interessadas. Somente pela sala de leitura, são 183 – 68 = 115 famílias interessadas.

Note que a soma 68 + 43 + 115 + 24 deve ser igual ao total de famílias, ou seja, 250.

Desenvolvendo competências

5

1. O Gráfico 1 mostra uma pesquisa realizada com 500 pessoas sobre o seu hábito de leitura dos jornais I e II:

Gráfico 1

A partir dos dados do gráfico, pode-se concluir que o número de entrevistados que habitualmente lêem os jornais I e II é igual a:

a) 44 *b) 55* *c) 63* *d) 71*

2. Uma academia de ginástica, após a inauguração de sua piscina, ofereceu mais dois cursos a seus freqüentadores: hidroginástica e natação. 52 pessoas inscreveram-se na hidroginástica e 47 na natação. Constatou-se que 7 pessoas inscreveram-se nos dois cursos. Então, o número de pessoas que se interessaram por pelo menos um dos novos cursos é:

a) 106 *b) 99* *c) 92* *d) 85*

Implicação

1. A frase abaixo foi retirada de uma propaganda veiculada em um jornal de grande circulação e diz respeito a uma grande festa promovida por uma empresa:

SE VOCÊ NÃO CONSEGUIU INGRESSO PARA A FESTA DESTE ANO,
TENTE ENCARAR PELO LADO BOM:
VOCÊ DANÇOU

As pessoas que não conseguiram ingresso, não puderam ir à festa deste ano. Sendo assim, a palavra "dançou" foi utilizada na propaganda com qual significado?

Note que existe uma relação entre dois fatos mencionados na propaganda: SE você não conseguiu ingresso, ENTÃO dançou. Esta é uma relação de causa e conseqüência (também chamada de causa e efeito):

CAUSA – não conseguiu ingresso

CONSEQÜÊNCIA – dançou

Em matemática, esta relação é conhecida como **implicação** e é representada pelo símbolo:

$$\Rightarrow$$

Poderíamos representar nosso exemplo da seguinte maneira:

não conseguiu ingresso $\Rightarrow$ dançou

2. Vamos analisar agora um outro exemplo de implicação. Suponha que você chegue a sua casa e observe que a rua está molhada.

A partir desse fato, você pode concluir que choveu na sua casa naquele dia?

Note que a sua rua pode estar molhada porque algum cano de água se rompeu ou alguém estava regando as plantas do jardim. Então, não é possível afirmar com certeza que choveu naquele dia.

Pensando sobre essa situação, observe as duas implicações abaixo:

1) Se chove, então a rua fica molhada.

2) Se a rua está molhada, então choveu.

As duas implicações acima têm o mesmo significado?

Repare que, apesar de serem muito parecidas (a implicação *2* é a implicação *1* invertida), as duas frases não têm o mesmo significado. A única coisa que fica garantida com a primeira frase é que, no caso de ocorrer chuva, a rua ficará molhada. O contrário, porém, não é necessariamente verdadeiro. Como já vimos, a rua pode estar molhada sem que tenha chovido.

Inverter uma relação de implicação é um erro bastante comum em argumentações, que não deve ser feito. Existe, no entanto, uma maneira equivalente de escrevermos uma implicação, muito utilizada em matemática, que iremos discutir a seguir.

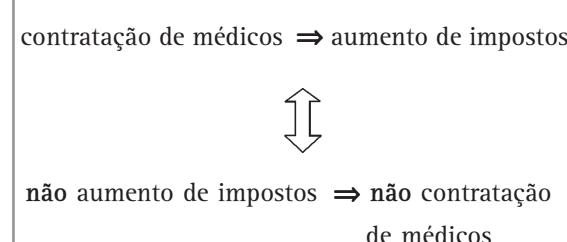
3. Observe a questão abaixo:

O prefeito de uma cidade declarou à imprensa que, se forem contratados mais médicos para o hospital municipal, então os impostos deverão ser aumentados. Qual das frases abaixo é equivalente à declaração do prefeito?

1) Se os impostos aumentaram, então mais médicos foram contratados para o hospital municipal.

2) Se os impostos não aumentaram, então não foram contratados mais médicos para o hospital municipal.

3) Se não foram contratados mais médicos para o hospital, então os impostos não foram aumentados.

Note que a afirmação inicial do prefeito é uma implicação:

contratação de novos médicos $\Rightarrow$ aumento de impostos

Observe ainda que outros fatores podem levar ao aumento de impostos: a contratação de novos professores para a escola municipal ou o aumento do salário dos funcionários da prefeitura pode levar a um aumento de impostos, mesmo que não sejam contratados novos médicos. Então, não é correto afirmar que se os impostos aumentaram, obrigatoriamente novos médicos foram contratados. Assim, a afirmação *1* não está correta.

Da mesma maneira, mesmo que não tenham sido contratados novos médicos, os impostos podem ter subido, devido a outros motivos. Logo, a afirmação *3* também não está correta.

Mas uma coisa, porém, é certa: se os impostos não tiveram de ser aumentados, podemos concluir que não foram contratados novos médicos (afinal, se fossem contratados, os impostos subiriam). A afirmação *2* é, portanto, equivalente à frase inicial do prefeito.

Vamos fazer um esquema das conclusões que tiramos:

contratação de médicos $\Rightarrow$ aumento de impostos

não aumento de impostos $\Rightarrow$ **não** contratação de médicos

Assim, se temos uma afirmação *a* que implica uma afirmação *b*, isto é equivalente a dizer que não *b* implica não *a*. Veja:

$a \Rightarrow b$ EQUIVALENTE A não $b \Rightarrow$ não a

Esse esquema dado acima pode ajudá-lo a decifrar um argumento, principalmente quando as frases são muito longas ou complexas. Basta transformar as afirmações em símbolos!

Desenvolvendo competências

6

1. Um analista econômico disse, em uma entrevista à televisão, que, se os juros internacionais estiverem elevados, então a inflação no Brasil crescerá. A partir dessa afirmação, pode-se concluir que, certamente:

a) se os juros internacionais estiverem baixos, então a inflação no Brasil diminuirá.

b) se a inflação no Brasil não tiver crescido, então os juros internacionais estarão baixos.

c) se a inflação no Brasil tiver crescido, então os juros internacionais estarão elevados.

d) se os juros internacionais não forem elevados, então a inflação brasileira cairá ou ficará igual.

2. Um quadrilátero é um polígono de 4 lados. A Figura 9 mostra um quadrilátero ABCD. Os segmentos AC e BD são chamados diagonais do quadrilátero. Lembre-se que um retângulo e um quadrado são quadriláteros.

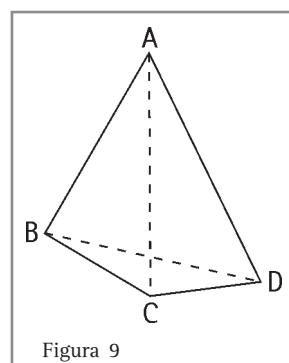



Figura 9

As duas afirmações abaixo, sobre quadriláteros, são verdadeiras.

- Se um quadrilátero é um quadrado, então ele também é um retângulo.
- As diagonais de qualquer retângulo são congruentes (isto é, têm a mesma medida).

A partir das informações acima, é correto afirmar que:

a) se um quadrilátero tem as diagonais congruentes, então ele é um quadrado.

b) todo retângulo é também um quadrado.

c) um quadrilátero que não é um quadrado não pode ter as diagonais congruentes.

d) um quadrilátero que não tem as diagonais congruentes não pode ser um quadrado.

Dedução

Vamos usar o que discutimos sobre argumentação para entender como se organizam as teorias matemáticas, ou seja, como as pessoas conseguem "descobrir" novos fatos dentro da matemática e convencer-se de que eles são verdadeiros.

Na matemática, assim como no nosso dia a dia, usamos com muita freqüência o raciocínio **dedutivo**. Observe a história abaixo para entender o que chamamos de dedução:

Note que a menina dona do ursinho sabe quem foi o autor da brincadeira. Utilizando-se de um raciocínio dedutivo ela concluiu quem teria deixado o ursinho do outo lado da margem, baseando-se em um fato: o menino está molhado!

Tente lembrar-se de uma situação que lhe tenha ocorrido, em que você utilizou a dedução.

Figura 10

Vamos agora, partindo de alguns fatos matemáticos, deduzir um novo fato, que você talvez já tenha ouvido falar: a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

I. Fatos iniciais

a) Considere, em um plano, uma reta *r* e um ponto P fora de *r*, como mostra a Figura 11. Então, existe uma única reta *s*, paralela a *r*, passando pelo ponto P.

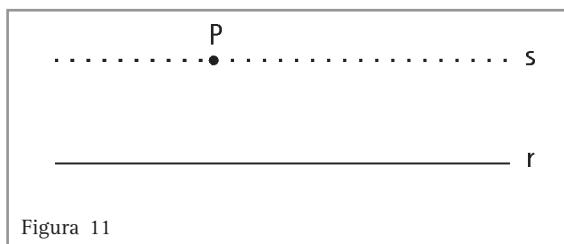



Figura 11

b) Considere, num plano, duas retas paralelas *a* e *b*, como mostra a Figura 12, e uma reta transversal *t*. Então, os ângulos α e β assinalados na figura são congruentes, isto é, têm medidas iguais.

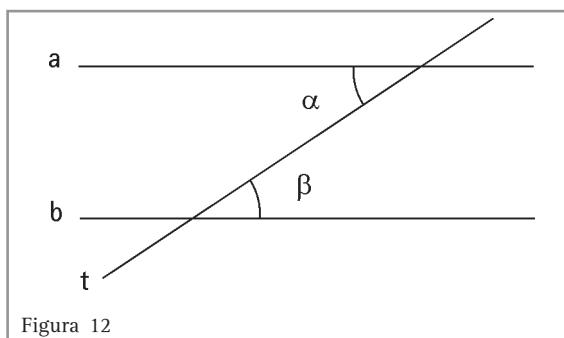



Figura 12

c) Se um ângulo raso (ângulo de meia volta) é dividido em três ângulos, então a soma desses ângulos é igual a 180°.

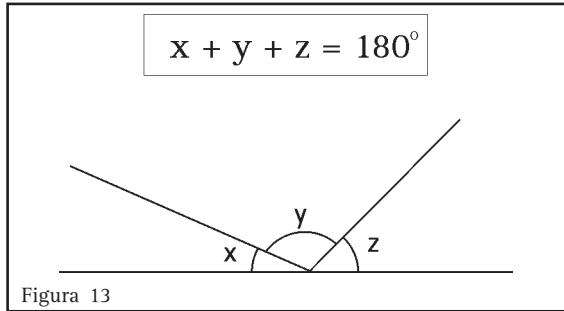



Figura 13

II. Dedução da propriedade

Vamos considerar um triângulo ABC qualquer, cujos ângulos internos medem x, y e z, como mostra a Figura 14.

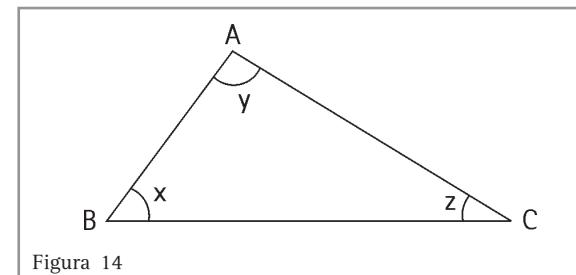



Figura 14

Pelo fato *a*, podemos desenhar uma reta *r*, paralela ao lado BC, passando pelo ponto A.

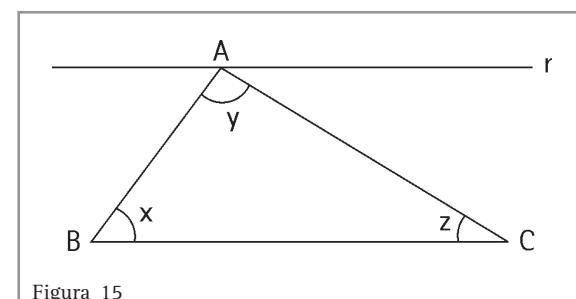



Figura 15

Pelo fato *b*, podemos representar:

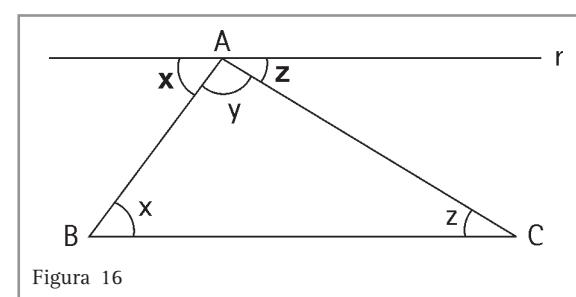
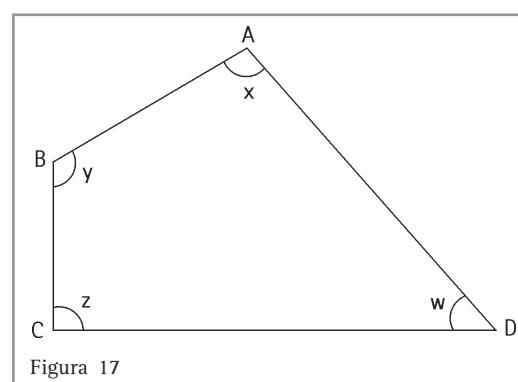



Figura 16

Finalmente, pelo fato *c* concluímos que $x + y + z = 180°$. Acabamos de deduzir que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°. Note que a nossa dedução é muito parecida com a da menina do ursinho ou com aquela que usamos no dia-a-dia: partindo de alguns fatos conhecidos e usando argumentos logicamente válidos, podemos produzir novas afirmações, também verdadeiras. A única diferença é que na matemática sempre deixamos claros os fatos iniciais que estamos utilizando, o que no cotidiano nem sempre fazemos.

Desenvolvendo competências

7

Usando como fato conhecido que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180°, deduza quanto vale a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Sugestão: *utilize a Figura 17 e divida o quadrilátero em dois triângulos.*

Figura 17

Vamos observar agora a dedução de uma propriedade algébrica. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, deduza uma maneira equivalente de escrever o produto

$(a + b) . (a - b)$.

Vamos relembrar a propriedade distributiva da multiplicação antes de iniciarmos nossa dedução. Desenvolva o produto $2y . (y - 3)$.

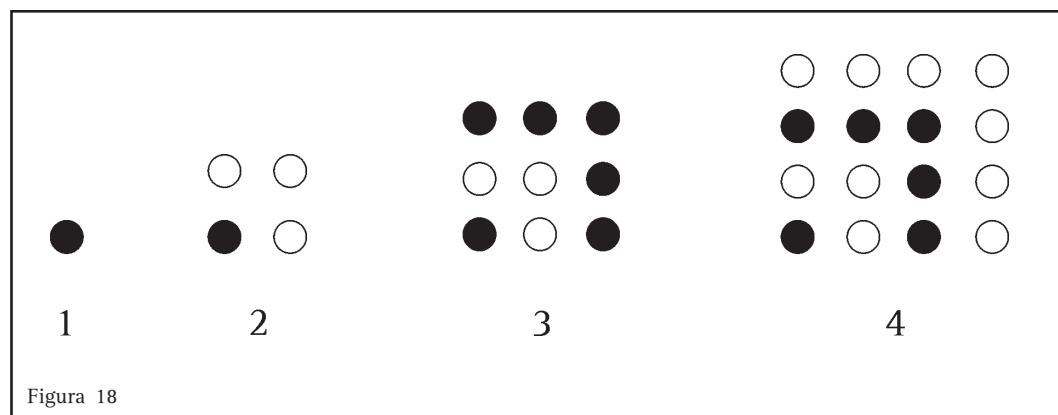
Note que o fator 2y deve ser "distribuído" tanto ao y quanto ao 3. Assim:

$$2y . (y - 3) = 2y . y - 2y . 3 = 2y^2 - 6y$$

Voltando à nossa pergunta, vamos desenvolver o produto $(a + b) . (a - b)$ utilizando a propriedade distributiva:

$$(a + b) . (a - b) = a.a - \cancel{a.b} + \cancel{a.b} - b.b = a^2 - b^2$$

Note que usamos também a lei do cancelamento da adição: $a . b - a . b = 0$. Assim, concluímos que **$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$.**

Desenvolvendo competências

8

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, deduza uma maneira equivalente de escrever o produto $(a + b)^2$.

Sugestão: Lembre-se de que $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$.

Indução

Observe a seguinte seqüência de figuras:

Figura 18

Note que o número de bolinhas em cada figura vai aumentando seguindo uma certa lei. De acordo com essa lei,

a) desenhe a 5ª figura dessa seqüência.

b) Quantas bolinhas há na Figura 5?

c) Responda, sem fazer o desenho, quantas bolinhas há na figura 6?

Ao fazer o desenho, você deve ter observado que a 5ª figura possui 25 bolinhas.

Em seguida, você pôde, sem fazer o desenho, dar um bom "palpite" sobre o número de bolinhas existentes na 6ª figura. Para isso, você teve de analisar o comportamento das figuras anteriores. Observe a Tabela 4 abaixo:

Se o comportamento for mantido, esperaremos que a 6ª figura tenha 6 . 6 = 36 bolinhas. Fazendo o desenho, você pode comprovar que, de fato, esse é o número de bolinhas da figura 6 e que nosso "palpite" estava certo.

O raciocínio que utilizamos na nossa resposta, sem fazer o desenho, é um exemplo do que chamamos **raciocínio indutivo**. A partir da observação de alguns casos particulares, identificamos um comportamento que se repetia e fizemos uma **conjectura** (ou seja, um palpite).

Observe que o raciocínio indutivo, em matemática, ajuda-nos a "desconfiar" de um resultado e, por isso, é extremamente importante.

Figura	1	2	3	4	5
Bolinhas	1 x 1=1	2 x 2=4	3 x 3=9	4 x 4=16	5 x 5=25

Tabela 4

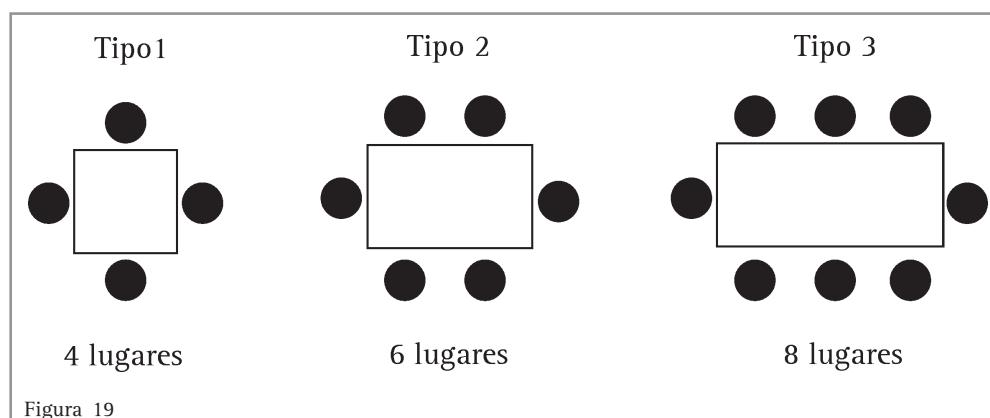
No entanto, não devemos considerar válida uma conclusão baseando-nos apenas na indução. No nosso caso, o desenho da 6ª figura da Figura 18 poderia nos confirmar a validade de nossa conclusão.

Esse fato não tira a importância do raciocínio indutivo. É graças a ele que a maioria das descobertas em matemática e nas demais ciências foi feita. Normalmente, é da observação de um comportamento que se repete em alguns casos particulares que os cientistas tiram inspiração para estudar determinado fenômeno. O raciocínio dedutivo, depois, serve para confirmar ou não aquelas suspeitas.

No nosso caso, poderíamos usar um argumento geométrico para confirmar o nosso "palpite": a 6ª figura da Figura 18 é um quadrado com 6 bolinhas em cada lado. Sendo assim, possui 6 fileiras com 6 bolinhas cada, ou seja, 6 . 6 = 36 bolinhas. Observe ainda que, com esse argumento, poderíamos generalizar a nossa conclusão: a figura n possui $n \cdot n = n^2$ bolinhas.

Desenvolvendo competências

9

1. Considere a sequência de figuras formadas por bolinhas, representada na figura 18. Note que, em cada figura, acrescentamos uma nova "camada" de bolinhas, todas da mesma cor. Assim, a 4ª figura, por exemplo, era formada por 4 "camadas" de bolinhas:

1 (laranja) + 3 (brancas) + 5 (laranjas) + 7 (brancas) = 16 bolinhas.

a) Usando a 5ª figura, desenhada por você, tente, sem efetuar a adição, prever o resultado da soma 1 + 3 + 5 + 7 + 9.

b) Note que o resultado que você obteve no item a é a soma dos 5 primeiros números ímpares positivos. Usando esse raciocínio, tente prever o resultado da soma dos 10 primeiros números ímpares positivos.

2. Um restaurante tem mesas retangulares de diferentes tamanhos, para acomodar um número diferente de clientes. A Figura 19 mostra os três menores tipos de mesa e o número de clientes acomodados em cada um deles:

Figura 19

Seguindo o mesmo padrão apresentado na seqüência de figuras acima, o número de clientes que podem ser acomodados em uma mesa do tipo 6 é:

a) 12 *b) 14* *c) 16* *d) 18*

Seqüências

Os jogos olímpicos, o mais importante evento esportivo do planeta, ocorrem a cada 4 anos. Os últimos jogos olímpicos ocorreram na cidade de Atenas, no ano de 2004. É possível sabermos em quais anos teremos a realização de jogos olímpicos? Ora, essa não é uma pergunta difícil, já temos as informações necessárias para respondê-la:

2004, 2008, 2012, 2016, 2020, ...

Os números acima formam uma seqüência. Note que obedecemos uma ordem ao escrevermos esses números. Dizemos que 2004 é o 1º termo da seqüência, 2008 é o 2º termo, 2012 é o 3º termo e, assim, sucessivamente. Essa informação normalmente é dada de maneira mais resumida. Observe:

$a_1 = 2004$

$a_2 = 2008$

$a_3 = 2012$

Quem é, na nossa seqüência, a_4*? E* a_6*?*

A nossa seqüência é formada por números, mas também podemos estudar seqüências de figuras, objetos, letras ou qualquer outra coisa que desejarmos.

Note que existe uma lei em nossa seqüência, que nos permite descobrir quais serão os seus próximos elementos. Nem sempre, porém, isso ocorre. Imagine que a seqüência (3, 0, 2, 1, 1, 2) seja o número de gols que uma equipe marcou nos 6 primeiros jogos de um campeonato.

É possível sabermos o próximo elemento dessa seqüência apenas observando os anteriores?

Neste capítulo, vamos estudar apenas as seqüências que obedecem alguma lei, permitindo prever quais serão seus próximos elementos. Com isso, estaremos utilizando tanto o nosso raciocínio dedutivo quanto o indutivo.

Uma estrada possui telefones de emergência a cada 3 quilômetros. O primeiro telefone está colocado no quilômetro 2 da estrada.

a) Determine a localização dos cinco primeiros telefones de emergência.

b) Determine a localização do 72º telefone de emergência.

c) Se a estrada tem uma extensão de 350 km, quantos telefones de emergência ela possui?

a) Observe que, das informações do enunciado, percebemos a existência de um padrão regular na colocação dos telefones. Assim, partindo do quilômetro 2, basta acrescentarmos 3 quilômetros para obtermos a localização do próximo telefone:

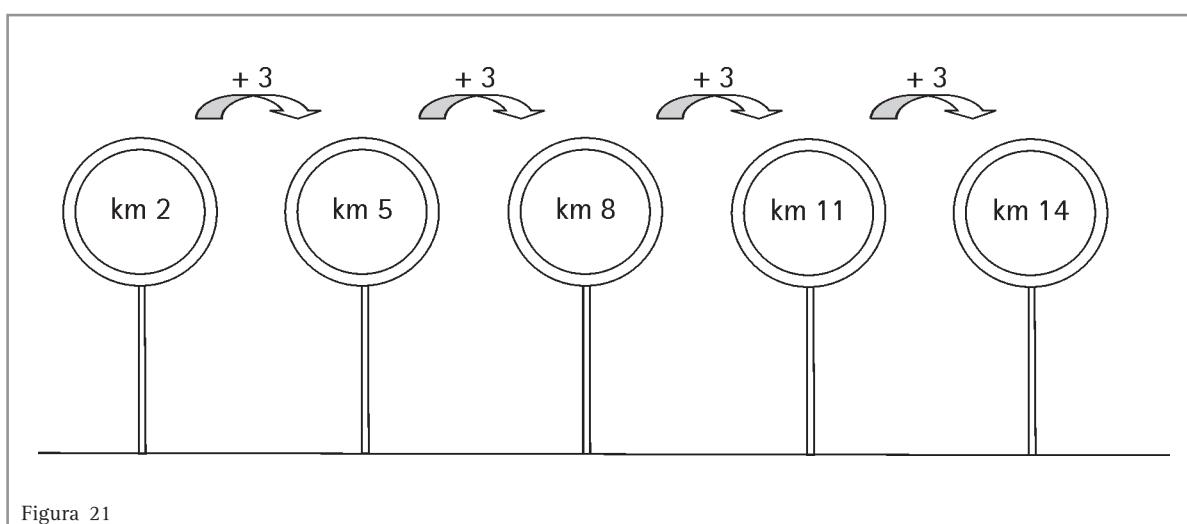



Figura 21

Então, os cinco primeiros telefones de emergência estão localizados nos quilômetros 2, 5, 8, 11 e 14.

b) É possível obtermos a localização do 72º telefone da mesma maneira que fizemos no item anterior, ou seja, somando 3 quilômetros à localização de cada telefone para obter a localização do seguinte e, assim, sucessivamente. Deve haver, porém, uma maneira mais simples, você não acha? Vamos tentar estabelecer um padrão:

Telefone	Operação realizada	Localização (km)
1	——	2
2	2 + 3	5
3	2 + 3 + 3	8
4	2 + 3 + 3 + 3	11
5	2 + 3 + 3 + 3 + 3	14

Tabela 5

Note que temos de efetuar uma série de adições, sempre com a mesma parcela 3. Então, podemos efetuar essa operação utilizando a multiplicação. Olhe como fica melhor:

Telefone	Operação realizada	Localização (km)
1		2
2	2 + **1** . 3	5
3	2 + **2** . 3	8
4	2 + **3** . 3	11
5	2 + **4** . 3	14

Tabela 6

Você percebe a relação entre o número do telefone e o fator pelo qual devemos multiplicar o 3?

Observe que o fator pelo qual multiplicamos o 3 é sempre um a menos do que o número do telefone (telefone 5 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 3$). De maneira semelhante, para o 72º telefone, teríamos:

telefone 72 $\rightarrow$ $2 + 71 \cdot 3 = 215$

Então, o 72º telefone estaria no quilômetro 215.

c) Para responder a esta pergunta, vamos tentar generalizar a conclusão que tiramos no item b. Lembre-se que o fator pelo qual multiplicamos o 3 é sempre um a menos do que o número do telefone. Então, vamos considerar um telefone genérico n. De acordo com a conclusão acima, então, a sua localização seria:

telefone n $\rightarrow$ $2 + (n - 1) \cdot 3$

A expressão acima é chamada lei de formação da seqüência. Note que, a partir dela, é possível obtermos a localização de qualquer telefone, bastando para isso substituir a variável n pelo número do telefone cuja localização desejamos saber. Por exemplo, para sabermos a localização do 58º telefone, basta fazermos:

telefone 58 $\rightarrow$ $2 + (58 - 1) \cdot 3 = 2 + 57 \cdot 3 = 173$, isto é, o 58º telefone está localizado no quilômetro 173.

Voltando à nossa pergunta, desejamos saber o número do telefone que está localizado no quilômetro 350 (seria o último telefone da estrada). Nesse caso então, conhecemos a localização (**350**) e queremos obter o valor de **n** correspondente. Basta então resolvermos esta equação:

$$350 = 2 + (n - 1) \cdot 3$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$350 = 2 + 3n - 3$$

$$350 - 2 + 3 = 3n$$

$$351 = 3n$$

$$\frac{351}{3} = n$$

$$n = 117$$

Portanto, a estrada conta com 117 telefones de emergência.

Você notou como a lei de formação da seqüência é importante? Com ela, podemos obter qualquer termo da seqüência, bastando para isso substituir a variável n pela posição do termo que queremos descobrir. Por exemplo, se a lei de formação de uma seqüência é:

$$a_n = -4 + 2n^2$$

e desejamos obter os cinco primeiros termos da seqüência, basta fazermos:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = -4 + 2 \cdot 1^2 \therefore a_1 = -4 + 2 \therefore a_1 = -2$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = -4 + 2 \cdot 2^2 \therefore a_2 = -4 + 8 \therefore a_2 = 4$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = -4 + 2 \cdot 3^2 \therefore a_3 = -4 + 18 \therefore a_3 = 14$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = -4 + 2 \cdot 4^2 \therefore a_4 = -4 + 32 \therefore a_4 = 28$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = -4 + 2 \cdot 5^2 \therefore a_5 = -4 + 50 \therefore a_5 = 46$$

Então, os cinco primeiros termos dessa seqüência são: –2, 4, 14, 28 e 46.

Desenvolvendo competências

10

1. Se a lei de formação de uma seqüência é dada por $a_n = n + n^2$*, então o segundo* (a_2) *e o quinto* (a_5) *termos dessa seqüência são, respectivamente:*

a) 6 e 30

b) 16 e 30

c) 6 e 100

d) 16 e 100

2. Uma pessoa, desejando recuperar a forma física, elaborou um plano de treinamento que consistia em caminhar por 20 minutos no primeiro dia, 22 minutos no segundo dia, 24 minutos no terceiro dia e assim sucessivamente. Uma lei que permite calcular quantos minutos essa pessoa caminharia no dia **n** *é dada por:*

a) $20 \,.\, (n - 1) + 2$

b) $20 \,.\, n + 2$

c) $20 + (n - 1) \,.\, 2$

d) $20 + n \,.\, 2$

Conferindo seu conhecimento

1

1. Não, pois em matemática não podemos concluir que um fato é verdadeiro a partir apenas da observação de alguns exemplos. É possível que, para algum caso que não analisamos, aquele fato não se verifique.

*2. Resposta: (c) (note que a alternativa (c) fala de uma possibilidade, "a equipe V **pode** ser a campeã", enquanto que a alternativa (a) fala de uma certeza "a equipe V **será** a campeã", o que não pode ser afirmado, pois ainda faltam duas rodadas para o término do torneio).*

2

1. 6 2. 5 3. Resposta: (b)

4. Cinco das oito casas da rua tiveram um aumento de mais de 100 KWh em suas contas de luz, de março para abril. Não havendo motivo aparente para tal aumento, solicitamos a visita de um técnico para verificar se há problemas na rede elétrica da rua.

3

1. Resposta: (a)

4

1. Resposta: (b) 2. Resposta: (d)

5

1. Resposta: (b) 2. Resposta: (c)

6

1. Resposta: (b) 2. Resposta: (d)

7

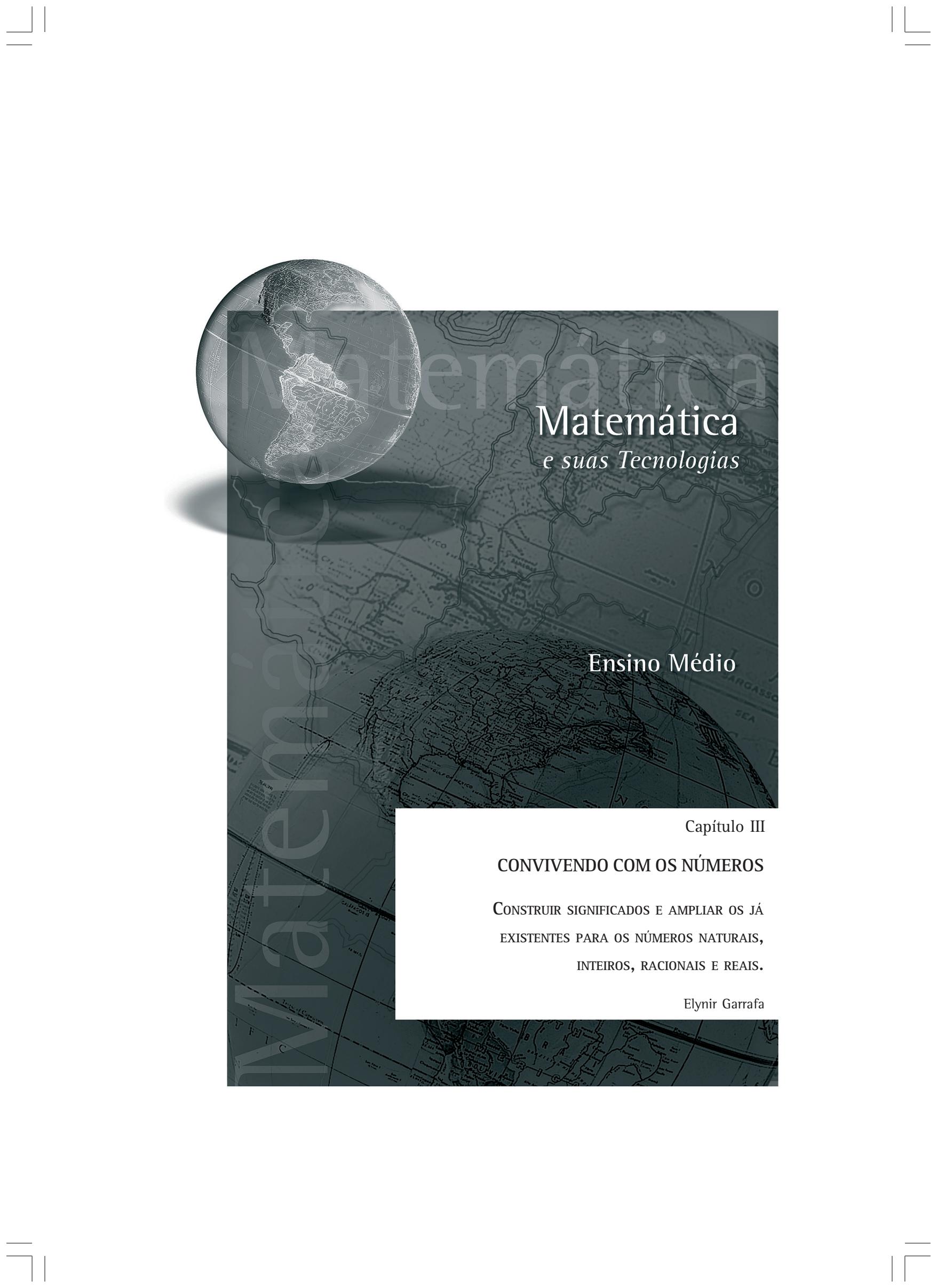
360° (Note que o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos. Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, obteremos para o quadrilátero 180° + 180° = 360°).

8

$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$

9

1. a) 5 . 5 = 25 b) 10 . 10 = 100 2. Resposta: (b)

10

1. Resposta: (a) 2. Resposta: (c)

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar e interpretar conceitos e procedimentos matemáticos expressos em diferentes formas.
- Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para explicar fenômenos ou fatos do cotidiano.
- Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para construir formas de raciocínio que permitam aplicar estratégias para a resolução de problemas.
- Identificar e utilizar conceitos e procedimentos matemáticos na construção de argumentação consistente.
- Reconhecer a adequação da proposta de ação solidária, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos.

Capítulo III

CONVIVENDO COM OS NÚMEROS

CONSTRUIR SIGNIFICADOS E AMPLIAR OS JÁ EXISTENTES PARA OS NÚMEROS NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS E REAIS.

Elynir Garrafa

Capítulo III

Convivendo com os números

O sistema numérico

Muitos séculos se passaram até que os hindus desenvolvessem o sistema de numeração decimal. Por não haver muitos documentos sobre a Matemática conhecida na Antigüidade, é impossível saber, com exatidão, quando isso aconteceu. Estima-se ter sido por volta do século V d.C.

Os algarismos: **0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 e 9** — escolhidos para compor o sistema de numeração decimal e posicional — foram por muito tempo denominados erroneamente algarismos **arábicos**, por terem sido apresentados pelos árabes. Por volta do século VII, ao entrarem em contato com a cultura hindu e motivados pela simplicidade e praticidade do sistema de numeração encontrado, tornaram-se seus divulgadores em todo o Oriente.

Assim, mais tarde, esses algarismos passaram a ser conhecidos como **hindu–arábicos**.

Em toda a Europa, durante muitos séculos, o sistema numérico usado era o romano e, apesar da simplicidade do sistema hindu-arábico, houve muita resistência à sua adesão, que só aconteceu efetivamente no século XVI.

Outro fato historicamente interessante foi a origem do número zero. Não há consenso entre os historiadores sobre a invenção do zero, atribuída tanto aos povos da Mesopotâmia quanto aos árabes, hindus e chineses. Arqueólogos identificaram um símbolo para esse número em tábuas de escrita cuneiforme de 300 a.C., feitas na Mesopotâmia, numa época em que a região era dominada pelos persas. A invenção do zero aumentou a precisão de todos os cálculos e trouxe um grande desenvolvimento para a aritmética e a astronomia.

O sistema de numeração hindu–arábico é o que utilizamos.

Os números fazem parte efetiva do nosso cotidiano. Estão em toda parte, nos cercam. Precisamos deles. Abrimos o jornal e nos deparamos com notícias repletas de números. Através deles nos expressamos diariamente.

Você já deve ter ouvido frases como estas...

- “Meu tapete mede **2** metros por **3** metros.”
- “O maior vírus conhecido mede **0,00025** cm.”
- “A parte correspondente a $\frac{2}{3}$ do meu salário é gasta com despesas mensais fixas.”
- “A catedral fica no marco **zero** da cidade.”
- “O diâmetro de uma molécula grande é **0,000017** cm.”
- “A temperatura em Nova York era de **– 8º Celsius**, enquanto que, no Rio de Janeiro, fazia **30ºC** à sombra.”
- “A cidade Vila Feliz fica no quilômetro **122** da rodovia João Paulo.”
- “O número encontrado foi **0,3111...**”
- “Para calcular o comprimento da circunferência, basta multiplicar o diâmetro por π, cujo valor é aproximadamente **3,141592**.”
- “O resultado foi **0,333....**”
- “Era um número diferente: **0,10110111..**”
- “Minha casa fica no número **122** dessa rua.”
- “Pedro conseguiu ser classificado em **1º** lugar no vestibular.“
- “Quando dividi **12** por **33**, encontrei como resultado **0,1212...**”

- ”Um freezer congela à temperatura de **–18°** Celsius.”
- “Viajamos à velocidade média de **80** quilômetros por hora.”
- “O cano mede $\frac{3}{4}$ de polegadas.”
- ”Um pão de queijo custa R$ **0,80**.”
- “A caixa d’água tem **10.000** litros de capacidade.”
- “Verificamos um resultado de **– 0,02%**.”

Observe na Figura 1 como os números são escritos de modos diferentes.

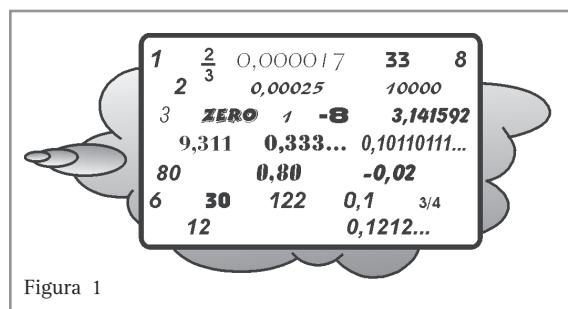



Figura 1

Você vai notar que a escrita de números, às vezes, usa a vírgula, outras, a forma de fração, como o $\frac{3}{4}$. E outras, o sinal negativo, como o **-8**, que é um número negativo.

No dia-a-dia, você encontra várias situações envolvendo esses números. Veja algumas dessas situações e os problemas propostos. As respostas que você não encontrar no próprio texto estarão no final do capítulo.

Vivemos calculando, fazendo estimativas e pensando em soluções envolvendo números. Por exemplo: Você está trabalhando na barraca de refrigerante da quermesse. No início da festa, havia 400 latas de refrigerantes e você gostaria de saber quantas vendeu.

Para calcular essa quantidade, é necessário contar as latas que sobraram e depois encontrar a diferença entre essa quantidade que sobrou e 400.

Os números usados para resolver esse problema são chamados de números naturais, mas podem também ser chamados de inteiros, *racionais* ou, ainda, números reais.

Quantas vezes temos de carregar uma sacola com várias coisas pesadas e nos perguntamos: *Quantos quilos estarei carregando?* Aí começamos a pensar: São dois quilos e meio de feijão; um quilo e trezentos de carne; um quilo e meio de farinha e meio quilo de sal.

Calcule o peso dessa sacola.

Você poderá fazer esse cálculo de vários modos.

- Um deles seria: primeiro, juntar os quilos inteiros, 2kg de feijão, mais 1kg de carne, mais 1kg de farinha, o que resulta em 4kg.

Depois, juntar os meios quilos: 0,5kg de feijão, mais 0,5kg de farinha, mais 0,5kg de sal, o que resulta em 1,5kg.

Juntando os 4kg com 1,5kg, são 5,5kg.

E, por fim, juntar os 300 gramas de carne, o que resulta em 5kg e 800 gramas, que pode ser escrito como 5,8kg.

- Outro modo seria pensar que:

dois quilos e meio de feijão são 2,5kg;

um quilo e trezentos de carne são 1,3kg;

um quilo e meio de farinha são 1,5kg;

meio quilo de sal são 0,5kg.

Calculando a soma, teremos:

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ 1,3 \\ 1,5 \; + \\ 0,5 \\ \hline 5,8 \end{array}$$

Veja que, nos dois modos de solução, os números que usamos foram representados com vírgula. Esses não são naturais nem inteiros. Podem ser chamados de racionais e também de números reais. São conhecidos como decimais e podem ser escritos em forma de uma fração com denominador 10, 100, 1.000 etc.

$$2,5 = \frac{25}{10} \qquad 0,48 = \frac{48}{100} \qquad 1,245 = \frac{1.245}{1.000}$$

Observe que o número de casas decimais (algarismos depois da vírgula) é igual ao número de zeros do denominador.

As frações surgiram, há muitos anos atrás, com a necessidade de medir quantidades não inteiras. Há registros de sua origem desde o tempo dos faraós do Egito, 3000 anos antes de Cristo, e estão presentes em nosso dia-a-dia.

Desenvolvendo competências

1

A receita abaixo é de um bolo básico para 15 pessoas. Como você faria para calcular os ingredientes da mesma receita, se quisesse fazer o mesmo bolo, com o recheio, para 30 pessoas, sem perder a qualidade?

BOLO BÁSICO

1 xícara de manteiga
2 xícaras de açúcar
3 xícaras de farinha de trigo
3 colheres (de chá) de fermento em pó
1 xícara de manteiga
1 colher (de chá) de baunilha
4 ovos
1 xícara de leite

Figura 2

Figura 3

E agora para o recheio?

Figura 4

Nessa receita aparecem também as frações:

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

Situações como essa acontecem sempre. Uma representação dessa situação poderá ajudá-lo a descobrir quanto é o dobro de $\frac{1}{4}$.

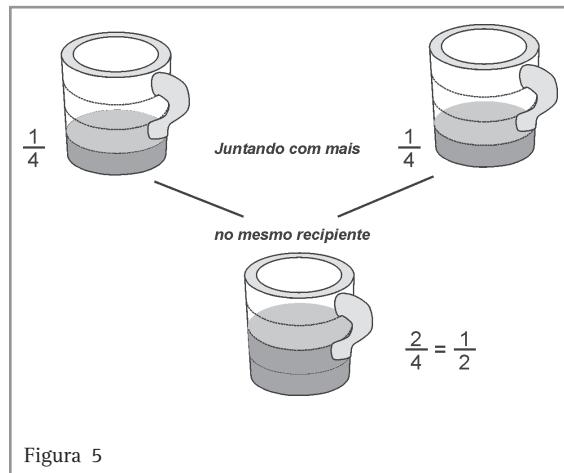



Figura 5

A Figura 5 mostra que

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ou $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ e que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Quando fazemos cálculos desse tipo, estamos trabalhando com os números racionais escritos na forma de fração.

Agora, faça você uma representação para obter o dobro de $\frac{1}{2}$.

Mas, quanto é o dobro de $\frac{3}{4}$ do litro de leite? É mais que 1 litro?

Vamos usar também uma representação dessa situação para nos ajudar. Veja, na figura seguinte que, para representar $\frac{3}{4}$ de um litro de leite, podemos dividi-lo em 4 partes iguais e colorir 3 dessas partes.

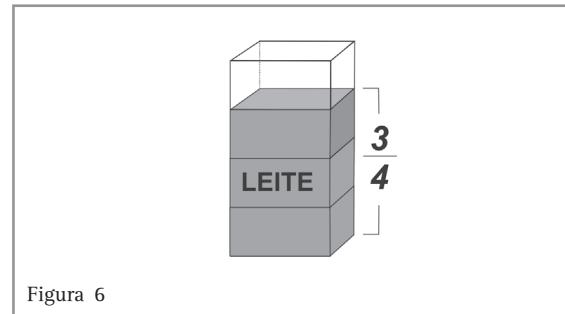



Figura 6

Como queremos dobrar essa quantidade, teremos:

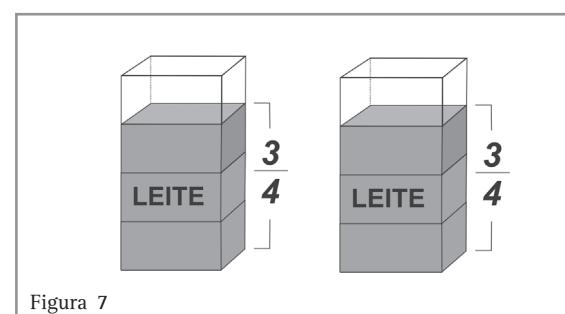



Figura 7

Para perceber melhor que quantidade é essa, você pode completar um dos litros de leite, tirando $\frac{1}{4}$ do outro. Veja como fica a nova representação.

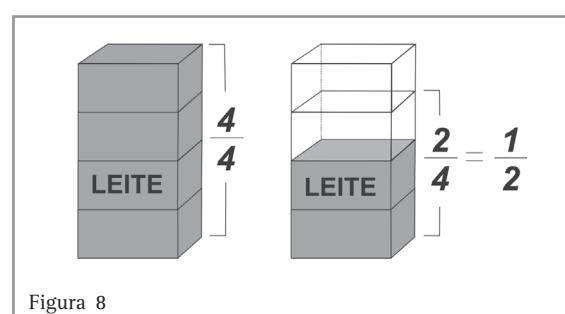



Figura 8

Como vimos antes $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Então o dobro de $\frac{3}{4}$ é **1 litro e meio.**

Usando o que discutimos aqui, pense em triplicar a receita do bolo. Para quantas pessoas daria?

Qual é o triplo de $\frac{1}{4}$? De $\frac{1}{2}$? De $\frac{3}{4}$?

Usando Frações

Vamos ver uma outra situação em que usamos as frações.

Uma receita de suco indica que se use 1 copo de caldo da fruta para 8 copos de água. Para fazer um suco mais suave, com 50% a menos de caldo de fruta, eu preciso:

a) aumentar a quantidade de caldo de fruta para 2 copos e aumentar a quantidade de água para 16 copos.

b) aumentar a quantidade de água para 10 copos e a de caldo de fruta para 5.

c) diminuir a quantidade de caldo de fruta para $\frac{1}{2}$ copo e aumentar a quantidade de água para 16 copos.

d) diminuir a quantidade de caldo de fruta para $\frac{1}{2}$ copo e manter a quantidade de água.

Resolvendo o problema

Nesse problema, vamos comparar quantidades e escrever essa comparação na forma de fração.

Para começar, vamos entender o que o enunciado quer dizer quando se refere a 50% a menos de caldo de fruta. Cinqüenta por cento (50%) é uma forma de representar a fração $\frac{50}{100}$. Essa fração é equivalente a $\frac{1}{2}$ (veja que 50 é metade de 100). Então, reduzir a quantidade de caldo de fruta em 50% significa usar apenas a metade da quantidade indicada na receita.

Pensando assim, vamos analisar cada uma das alternativas de respostas para esse problema:

- Na alternativa (a), em que se propõe usar 2 copos de caldo de fruta para 16 de água, note que a receita foi dobrada, isto é, as quantidades foram multiplicadas por dois, o que não reduziu a quantidade de caldo de fruta, como requer o problema. Teremos o suco idêntico ao da receita e não mais fraco.

- Na alternativa (b), em que se propõe aumentar a quantidade de água, para 10 copos e a de caldo de fruta para 5, note que a quantidade de água foi aumentada em 2 copos e a de caldo de fruta foi aumentada em 3 copos. Assim, o suco não ficou mais suave e sim mais forte.
  Na receita, devemos usar a relação $\frac{1}{8}$, isto é, um para oito e, nessa alternativa, a relação usada é $\frac{5}{10}$, isto é, cinco para dez, que é igual a $\frac{1}{2}$.

- A alternativa (c), em que se propõe diminuir a quantidade de caldo de fruta para $\frac{1}{2}$ copo e aumentar a quantidade de água para 16 copos, também não é a correta. A relação $\frac{1}{2}$ para 16 é equivalente a usar 1 copo de suco para 32 copos de água $\left(\frac{1}{32}\right)$, ficando assim 25% mais fraco, reduzindo $\frac{1}{4}$ do caldo de fruta da receita original, e não da metade como propõe o problema.

- A alternativa (d) é a correta porque, ao diminuir a quantidade de caldo de fruta para $\frac{1}{2}$ copo e ao manter a quantidade de água, estabelecemos a relação $\frac{1}{2}$ para 8, que é equivalente à relação 1 para 16 $\left(\frac{1}{16}\right)$, indicando uma redução de metade de caldo de fruta da receita original, como propõe o problema.

Desenvolvendo competências

2

Para fazer 160 queijos, todos com o mesmo peso, são necessários 240 litros de leite. Se quisermos aumentar a produção em 25%, mantendo a qualidade do produto, teremos:

a) 200 queijos e serão usados 600 litros de leite.

b) 200 queijos e serão usados 240 litros de leite.

c) 40 queijos a mais e serão usados 300 litros de leite.

d) 200 queijos e serão usados 480 litros de leite.

Desenvolvendo competências

3

Qual a maneira mais conveniente, financeiramente, de embalar para transportar uma colheita de 560 maçãs?

a) Usando caixotes que acomodam $\frac{7}{8}$ da colheita, pagando por todos R$ 20,00 e colocando o restante em caixas pequenas, para 8 unidades, a R$ 1,00 a caixa.

b) Usando caixotes que acomodam $\frac{6}{7}$ da colheita, pagando por todos R$ 20,00 e colocando o restante em caixas pequenas, para 8 unidades, a R$ 1,00 a caixa.

c) Usando caixotes que acomodam $\frac{4}{5}$ da colheita, pagando por todos R$ 20,00 e colocando o restante em caixas pequenas, para 8 unidades, a R$ 1,00 a caixa.

d) Usando caixotes que acomodam $\frac{3}{4}$ da colheita, pagando por todos R$ 20,00 e colocando o restante em caixas pequenas, para 8 unidades, a R$ 1,00 a caixa.

Dois alunos estavam discutindo para saber quem tirou a maior nota na prova, em que 100% de acertos correspondia à nota 10. No lugar da nota, o professor escreveu a fração correspondente ao que cada um acertou. Um deles tinha $\frac{2}{5}$ da prova correta e o outro, $\frac{3}{4}$. Você sabe a nota que cada um tirou?

Resolvendo o problema

Esse problema pode ser resolvido de várias maneiras. Uma delas seria usar o conceito de número racional como o resultado da divisão de dois números inteiros.
Observe como:

$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0{,}4$	$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75$
0,4 = 4 décimos ou $\frac{4}{10}$	0,75 = 75 centésimos ou $\frac{75}{100}$
no nosso problema, $\frac{4}{10}$ quer dizer que acertou 4 em 10.	e $\frac{75}{100}$ quer dizer que acertou 75 em 100, ou 7,5 em 10.
ou ainda $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$	$\frac{75}{100}$
40% de acerto na prova.	75% de acerto na prova.
Ao obtermos a porcentagem de acerto na prova, fica mais fácil percebermos a nota correspondente. O primeiro aluno ficará com nota 4 (quatro) e o outro com nota 7,5 (sete e meio).	

Números negativos

Além das frações e dos decimais, o homem, no decorrer do tempo, precisou de registros para expressar números menores que zero. Foram chamados de **números negativos**, que, acrescentados ao conjunto dos números naturais, deram origem a um novo conjunto numérico chamado de **conjunto dos números inteiros.**

Atualmente convivemos com situações envolvendo os números negativos, usados, por exemplo, para registrar "queda" ou "perda". As mais comuns são:

- o saldo bancário devedor;
- as temperaturas abaixo de zero;
- os pontos perdidos no campeonato de futebol.

Usando esses registros, podemos resolver problemas como:

Numa cidade da Europa, onde no inverno faz muito frio, o termômetro está marcando – 8° Celsius, ao mesmo tempo em que, em outra localidade nesse país, a temperatura é de – 2° Celsius. Em qual das duas cidades faz mais frio, na que tem temperatura de – 8° Celsius ou na que tem – 2° Celsius?

Resolvendo o problema

Antes de discutirmos o problema, vamos lembrar como fazemos a leitura de um termômetro.

- Um termômetro marca temperaturas abaixo de zero como negativas e acima de zero como positivas!

Assim, se está muito frio e a temperatura atingiu 2 graus abaixo de zero, podemos dizer que o termômetro marcou 2 graus negativos, isto é, a temperatura local era de –2° Celsius. Se forem 2 graus acima de zero, dizemos, simplesmente, 2° Celsius. (Celsius é a unidade de temperatura usada no Brasil.)

Você pode observar que, quanto mais abaixo de zero estiver a temperatura, mais frio estará fazendo, isto é, – 8º Celsius é uma temperatura menor do que –2º Celsius.

Essa comparação entre as temperaturas pode ser escrita em linguagem matemática simbólica. Em Matemática usamos o sinal > para indicar maior e o sinal < para indicar menor. Usando esses sinais podemos escrever:

$(-2) > (-8)$ ou $(-8) < (-2)$.

Escreva você mais alguns números negativos e compare-os usando os sinais > ou <.

Vejamos mais um problema envolvendo temperatura

Às 9 horas da manhã, a temperatura estava agradável, fazia 18ºC. Ao meio dia, passou para 20°C e às três horas da tarde, começou a esfriar caindo para 17°C. Durante a noite, esfriou muito e, às 2 horas da madrugada, os termômetros marcavam –2°C. Às 5 horas da manhã, já estava marcando – 4°C (C é a abreviação de Celsius e, ao lermos –2°C, devemos dizer dois graus Celsius negativos). Encontre a maior variação de temperatura ocorrida nesse período.

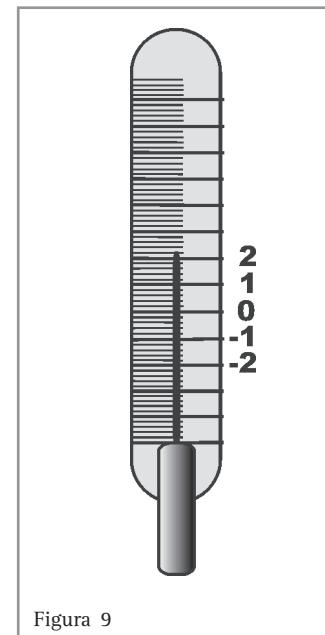



Figura 9

Resolvendo o problema

Use os sinais **+** ou **-** para registrar as temperaturas observadas durante esse período e encontre a diferença entre a maior e a menor temperatura.

1. As temperaturas positivas: **+18, +20, +17.**
2. As temperaturas negativas: **–2 e –3.**
3. A maior temperatura: **+ 20.**
4. A menor temperatura: **– 3.**
5. Para calcular a diferença entre **-3 e 20,** podemos pensar que:

- de **–3** até zero, a diferença é **3.**
- de **0** até **20**, a diferença é **20.**

⇒ Então, a diferença entre –3 e 20 é **23**

Uso dos números negativos no dia-a-dia

Uma pessoa deposita seu dinheiro no banco, podendo retirar quando necessitar, pagar contas com cheques ou usar serviços que o banco oferece, pagando também algumas taxas cobradas, de acordo com as normas estabelecidas pelo governo. A conta é conhecida como "conta corrente".

Para acompanhar os depósitos e as retiradas, isto é, a movimentação da conta, o banco fornece um "extrato", em que estão registrados todos os lançamentos, através de números positivos e negativos.

Observe o extrato abaixo, referente a uma conta bancária, no período de 30 de abril até o dia 7 de maio.

Data	Lançamento	Valor
30/04	s a l d o	+957,97
02/05	cheque compensado	-56,00
03/05	cheque compensado	-160,00
03/05	cheque compensado	- 60,00
04/05	cheque compensado	-30,00
05/05	pagamento de título	-667,00
06/05	IOF	-1,13
07/05	depósito em cheque	+1.650,00
07/05	saldo	????

Como você faria para calcular o saldo, isto é, quanto dinheiro essa pessoa tinha no banco no dia 7 de maio?

Veja que, toda vez que a quantia é depositada (entra) no banco, aparece o sinal de + na frente da quantia e, quando é retirada, (sai através de cheques ou descontos), aparece o sinal de - na frente da quantia.

Um modo de se resolver esse problema é:

Somar os positivos e Somar os negativos

Juntar os dois totais:

+ 2.667,97 – 974,13 = **1.633,84**

Outro modo de fazer os cálculos é na ordem que a quantia aparece no extrato:

• + 957,97	-	56,00	=	+901,97
• + 901,97	-	160,00	=	+741,97
• + 741,97	-	60,00	=	+681,97
• + 681,97	-	30,00	=	+651,97
• + 651,97	-	667,00	=	-15,03
• -15,03	-	1,13	=	-16,16
• -16,16	+	1.650,00	=	**1.633,84**

Desenvolvendo competências

Suponha que o cliente que possui essa conta bancária tenha uma despesa total mensal de R$ 2.000,00, além do que está registrado nesse extrato. Se nenhuma quantia for depositada, no fim do mês de maio, seu saldo será positivo ou negativo? De quanto?

Desenvolvendo competências

5

Vamos fazer uma previsão de quanto essa pessoa precisa ganhar por mês, para poder pagar as despesas fixas (R$ 2.000,00) e as que estavam registradas como negativas no extrato, pretendendo ainda guardar dinheiro, de modo que, no final de um ano, tenha economizado R$ 1.400,00. Supondo que não ocorra nenhum gasto extra, essa pessoa precisa ganhar mensalmente:

a) no mínimo R$ 3.100,00.
b) no mínimo R$ 3.200,00.
c) no mínimo R$ 3.300,00.
d) no mínimo R$ 3.400,00.

Desenvolvendo competências

O saldo de gols de um time de futebol é o número de gols marcados **menos** *o número de gols sofridos. Observe a tabela e calcule o saldo de gols de cada time:*

Times do Recreio		
Amarelo	*2 x 1*	*Azul*
Vermelho	*2 x 2*	*Verde*
Azul	*1 x 1*	*Vermelho*
Amarelo	*3 x 0*	*Verde*
Amarelo	*1 x 2*	*Azul*
Azul	*0 x 3*	*Verde*

Tabela 1

Números inteiros também aparecem em gráficos. Gráficos são usados para transmitir dados e informações. Observar e analisar esses dados e informações são habilidades necessárias a todas as pessoas que queiram participar da sociedade complexa em que vivemos, pois os gráficos fazem parte do cotidiano dessa sociedade.

Veja o gráfico ao lado que se refere às temperaturas de uma determinada cidade, no mês de dezembro.

Ao observar esse gráfico, você pode notar que, em alguns dias do mês de dezembro, ocorreram temperaturas negativas, e, em outros, temperaturas positivas.

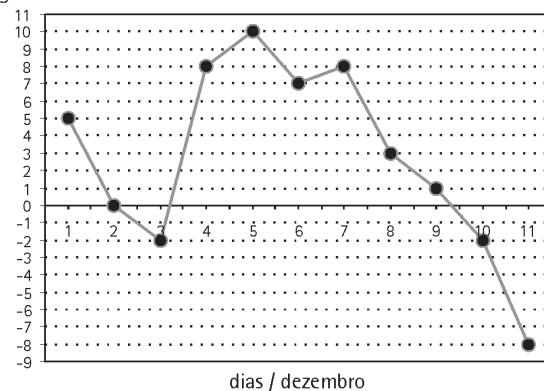



Figura 10

Desenvolvendo competências

7

A partir dessas observações, responda às questões:

a) A cidade a qual o gráfico se refere pode estar localizada numa região tropical no hemisfério sul? Por quê?

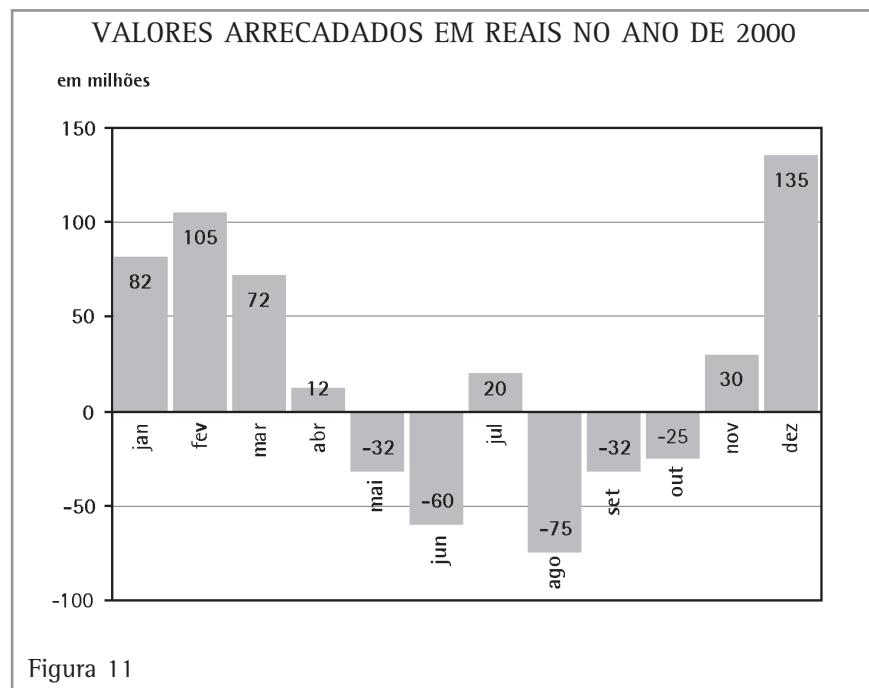
b) Qual a maior e a menor temperatura registrada?

c) A diferença entre dois dados de mesma natureza pode ser chamada de variação. Qual foi a variação da temperatura entre os dias 3 e 4?

d) Qual a variação da temperatura entre os dias 6 e 10?

e) Qual a diferença entre a maior e a menor temperatura registrada?

Desenvolvendo competências

8

De acordo com o gráfico, escolha a alternativa correta:

a) A temperatura manteve-se constante em todo o período.

b) Nos primeiros dias do mês, as temperaturas registradas foram as mais baixas do período.

c) Após o dia 7, a temperatura abaixou 8 graus.

d) Após o dia 7, a temperatura abaixou 16 graus.

Os gráficos de colunas também são muito usados para transmitir informações. Este que apresentamos mostra os resultados da arrecadação anual de uma firma.

Figura 11

Desenvolvendo competências

Analisando o gráfico, responda:

a) Em que meses a empresa teve lucro?

b) Em que meses a empresa teve prejuízo?

c) Qual o total dos lucros registrados no período?

d) Qual o total dos prejuízos registrados no período?

e) No ano de 2000, essa empresa teve lucro ou prejuízo? De quanto?

Você observou que este gráfico apresenta, além dos números positivos e negativos, uma forma "econômica" de registrar números? Veja que, no eixo vertical, os números que aparecem devem ser lidos como milhões. Por exemplo, o 150 e o 12 que lá estão devem ser lidos como 150 milhões e 12 milhões, respectivamente.

Essa forma de escrita numérica que expressa grandes quantidades é muito usada na imprensa, talvez porque, ao ler 150 milhões, a ordem de grandeza do número é imediatamente percebida pelo leitor, o que não aconteceria se fosse expressa como 150.000.000.

Observe essa forma de escrita numérica na reportagem extraída da revista de grande circulação, comentando o transporte no rio Guaíba.

EM 7 ANOS, O BRASIL REDESCOBRIU O CAMINHO DAS ÁGUAS

O Brasil possui mais de 40 mil rios navegáveis, mas vinha utilizando muito pouco esse sistema, que é 80% mais econômico que o rodoviário. O Governo Federal, por meio do Ministério dos Transportes, investiu muito nas hidrovias, e os resultados apareceram. A hidrovia do Tietê, por exemplo, passou a movimentar 4 milhões de toneladas/ano, depois que ficou pronta a eclusa de Jupiá. E a circulação de cargas no rio Madeira praticamente dobrou, passando de 1,3 milhões para 2,4 milhões de toneladas/ano. Além de mais econômico, o transporte hidroviário é o que menos interfere na natureza, deixando preservados os nossos rios, patrimônio de muitos brasileiros. Com os investimentos do Governo Federal, o Brasil está redescobrindo as hidrovias e mudando o seu sistema de transportes. E os transportes estão ajudando a mudar o Brasil (....).

Fonte: Revista *Veja*, São Paulo, 5 dez. 2001.

Perceba que a escrita numérica usada dessa forma causa mais impacto para ressaltar o que está acontecendo com o transporte hidroviário no Brasil.

São elas:

- **40 mil** em vez de **40.000**;
- **4 milhões** em vez de **4.000.000**;
- **1,3 milhões** em vez de **1.300.000**;
- **2,4 milhões** em vez de **2.400.000**.

Desenvolvendo competências

10

De acordo com a reportagem acima, os números indicam que o transporte utilizado no rio:

a) é uma boa solução, por preservar o ambiente, sendo seu custo 20% menor que o rodoviário.

b) não é uma boa solução, sendo 80% mais econômico que o rodoviário.

c) não é uma boa solução, sendo 20% mais econômico que o rodoviário.

d) é uma boa solução, por preservar o ambiente, sendo seu custo 80% menor que o rodoviário.

Ainda refletindo sobre a reportagem extraída da revista *Veja*, quais das alternativas abaixo estão matematicamente corretas.

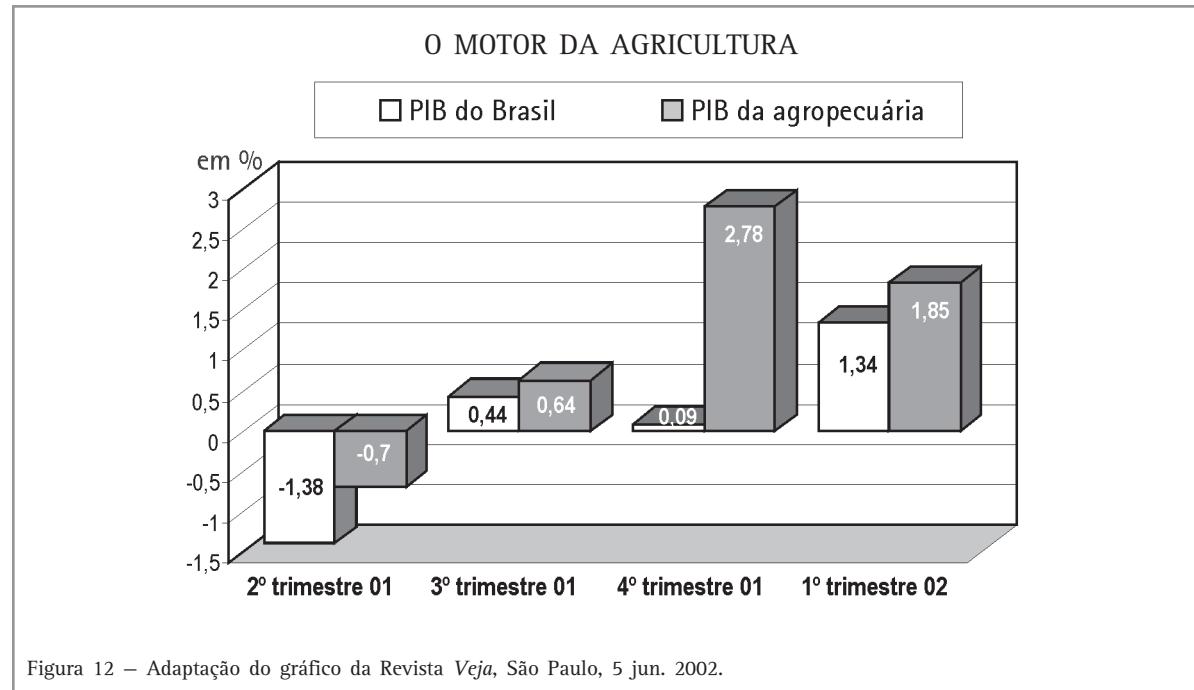
a) Depois dos investimentos em hidrovias, houve um aumento de aproximadamente 50% na circulação de cargas, isto é, de 1.000.000 de toneladas por ano.

b) O aumento de aproximadamente 50% na circulação de cargas indica que essa circulação dobrou.

c) Dizer que passou para o dobro significa um aumento de 100%, o que praticamente aconteceu.

d) O dobro de 1,3 milhões é 2,6 milhões e não 2,4 milhões.

e) Pela ordem de grandeza dos números, podemos aceitar o argumento do jornalista ao dizer que, ao atingir 2,4 milhões de toneladas/ano, a circulação de cargas *praticamente* dobrou.

Resolvendo o problema

Você deve ter percebido que as alternativas (a) e (b) não estão corretas porque dizer que a circulação de cargas dobrou não quer dizer que aumentou 50% e sim 100%, e 50% de 1,3 milhões não é 1.000.000 e sim 650.000.

As alternativas (c), (d) e (e) estão corretas porque o dobro de 1,3 milhões é 2,6 milhões, da mesma forma que um aumento de 100% significa passar de 1,3 milhões para 2,6 milhões e não para 2,4 milhões. No entanto, o emprego do termo **praticamente** permite ao jornalista a comparação feita, porque a diferença entre 2,6 milhões e 2,4 milhões é de 200 mil, que corresponde a menos de $\frac{1}{10}$ da circulação final ocorrida.

Voltando aos gráficos

Observando o gráfico que apresenta uma comparação entre o Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil e o Produto Interno Bruto da agropecuária, a partir do segundo trimestre de 2001 até o primeiro de 2002:

Figura 12 — Adaptação do gráfico da Revista *Veja*, São Paulo, 5 jun. 2002.

Desenvolvendo competências

11

De acordo com o gráfico da Figura 12, podemos afirmar que:

a) a maior variação do PIB da agropecuária foi de 3,23.

b) a maior variação do PIB da agropecuária foi de 3,48.

c) a diferença entre o menor valor do PIB da agropecuária e o valor registrado no 1º trimestre de 2002 foi de 3,23.

d) o maior valor do PIB da agricultura foi de 1,85.

Números irracionais

Você saberia dizer qual dos dois caminhos a formiga faz para chegar ao doce?
(a+c) ou b?

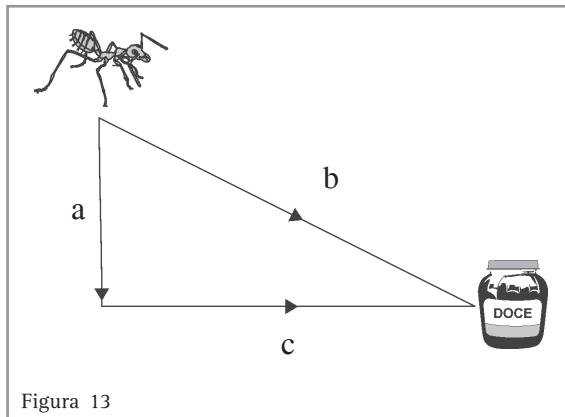



Figura 13

O professor Luiz Barco, em sua coluna na revista Super Interessante nº 147, afirma que até as formigas escolhem andar pelo maior lado do triângulo retângulo, em vez de percorrer os outros dois.
Segundo o prof. Barco, calcular caminhos é uma das várias aplicações práticas do teorema de Pitágoras. Usando este teorema, é possível calcular a menor distância entre dois pontos.

Pitágoras, um filósofo que viveu na Grécia aproximadamente 500 anos antes de Cristo, estabeleceu uma relação entre os lados do triângulo retângulo que ficou conhecida como "teorema de Pitágoras".

A descoberta de Pitágoras foi uma revelação para a Matemática, pois surgiram números para os quais não é possível extrair a raiz quadrada exata.

> O teorema de Pitágoras diz que:
> "Em um triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa".

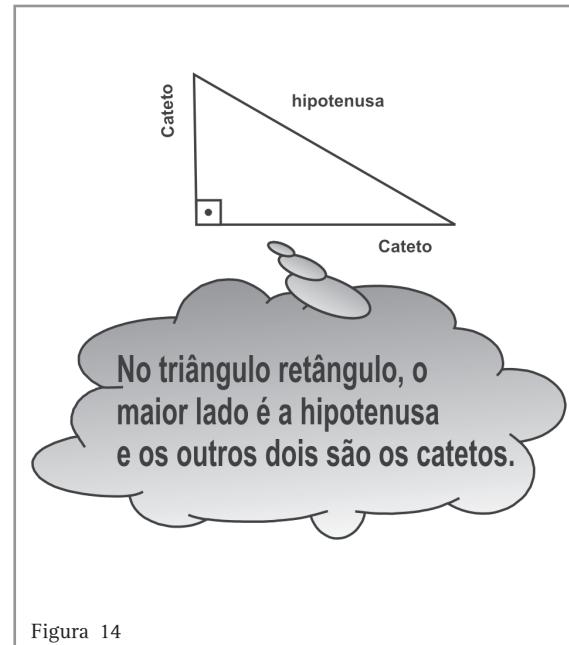
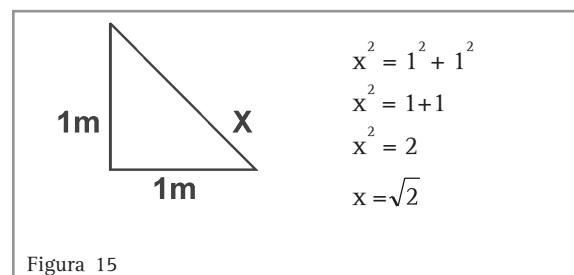



Figura 14

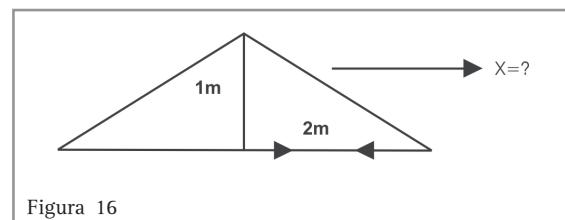
Veja o que ocorre quando aplicamos o teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo cujos catetos medem 1m.

Escrevemos:

Figura 15

Ao calcularmos o valor dessa raiz, com o auxílio de um computador, encontramos:

$\sqrt{2}$=1,4142135623730950488016887242097...

Note que os três pontinhos que aparecem depois do último algarismo 7 indicam que podemos continuar calculando essa raiz e ir aumentando infinitamente o número de casas decimais.

Outro fato importante para ser observado na representação decimal desse número é que não acontece com ele o mesmo que com outros números racionais que também têm infinitas casas decimais, como, por exemplo, os números 1,33333..., 52,15234234234234... Nesses casos, a partir de um determinado algarismo, há, na parte decimal, regularidade na repetição de algarismos. Veja que para $\sqrt{2}$ essa regularidade não ocorre.

Números como o $\sqrt{2}$ são chamados de irracionais porque não é possível escrevê-los na forma de uma razão, isto é, na forma fracionária com numerador e denominador inteiros. Existem muitos números irracionais. Veja mais alguns: $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{5}$; 0,10101101111... e o conhecido π, que nos permite calcular a área do círculo e o perímetro da circunferência.

Você viu, no decorrer desse capítulo que o conhecimento dos números e suas operações pode ajudá-lo em diferentes situações cotidianas. Existem, ainda, outras situações reais nas quais o conhecimento dos números irracionais pode ajudá-lo e a toda sua comunidade.

Os mutirões entre vizinhos, para a construção da casa própria, ocorrem em grande número em diferentes regiões do país.
Veja uma possibilidade de usar seu conhecimento dos números para resolver problemas que podem aparecer em construções.

Figura 16

Como você faria para calcular aproximadamente a medida da viga lateral da estrutura de um telhado como o da figura acima?

Resolvendo o problema

Você deve ter encontrado o valor $\sqrt{5}$ para x. Para obter o valor aproximado, você pode usar uma calculadora ou então considerar que:

como 5 é maior que 4, então $\sqrt{5}$ deve ser maior que $\sqrt{4}$; mas $\sqrt{4}$ é igual a 2,

como 5 é menor que 9, então $\sqrt{5}$ deve ser menor que $\sqrt{9}$; mas $\sqrt{9}$ é igual a 3,

então $\sqrt{5}$ é um número que está entre 2 e 3.

Como 5 está mais próximo de 4 do que de 9, então $\sqrt{5}$ deve estar mais próximo de 2 do que de 3.

Assim, multiplique 2,1 por 2,1 e, depois, multiplique 2,2 por 2,2; experimente também multiplicar 2,3 por 2,3.

Qual dos resultados que você obteve mais se aproxima de 5?

Se você achar que é o produto de 2,2 por 2,2, então poderá dizer que é aproximadamente igual a 2,2.

Isso quer dizer que a medida da viga é de aproximadamente 2,2 metros, que é o mínimo necessário. Porém, como há alguma perda em cortes, você deve considerar alguns centímetros a mais na hora da compra do material.

Desenvolvendo competências

12

Uma antena precisa ser fixada por 2 cabos de aço, conforme a figura abaixo. A quantidade mínima necessária de cabo de aço é:

a) $2\sqrt{5}\,m$.

b) $2\sqrt{10}\,m$.

c) 4 m.

d) 20 m.

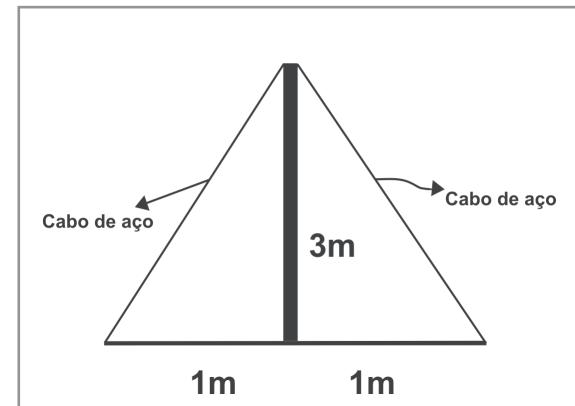



Figura 17

Ao juntarmos o conjunto dos números irracionais ao conjunto dos números racionais formamos o conjunto dos números reais. Dessa forma, todos os números que foram utilizados neste capítulo são números reais.

Chegando ao final dessa leitura, você deve ter percebido a importância de conhecer e saber utilizar os números naturais, inteiros, racionais e reais para resolver as mais diversas situações de seu cotidiano.

Conferindo seu conhecimento

1

BOLO BÁSICO

- *2 xícaras de manteiga*
- *4 xícaras de açúcar*
- *6 xícaras de farinha de trigo*
- *6 colheres (de chá) de fermento em pó*
- *2 xícara de manteiga*
- *2 colher (de chá) de baunilha*
- *8 ovos*
- *2 xícaras de leite*

2

Resposta (c).

3

Resposta (a).

4

Negativo R$ -241,16.

5

Resposta (b)

6

Amarelos 3; Verde 3; Azul -4; Vermelho 0

7

a) Não, porque é verão em dezembro no Hemisfério Sul.

b) A menor temperatura é – 8ºC.

c) A diferença é de 10 graus.

d) A diferença é de 9 graus.

e) A diferença é de 18 graus.

8 *Resposta (d).*

9 *Analisando o gráfico, você pode dizer se a empresa teve...*

a. Janeiro, fevereiro, março, abril, julho, novembro, dezembro.

b. Maio, junho, agosto, setembro, outubro.

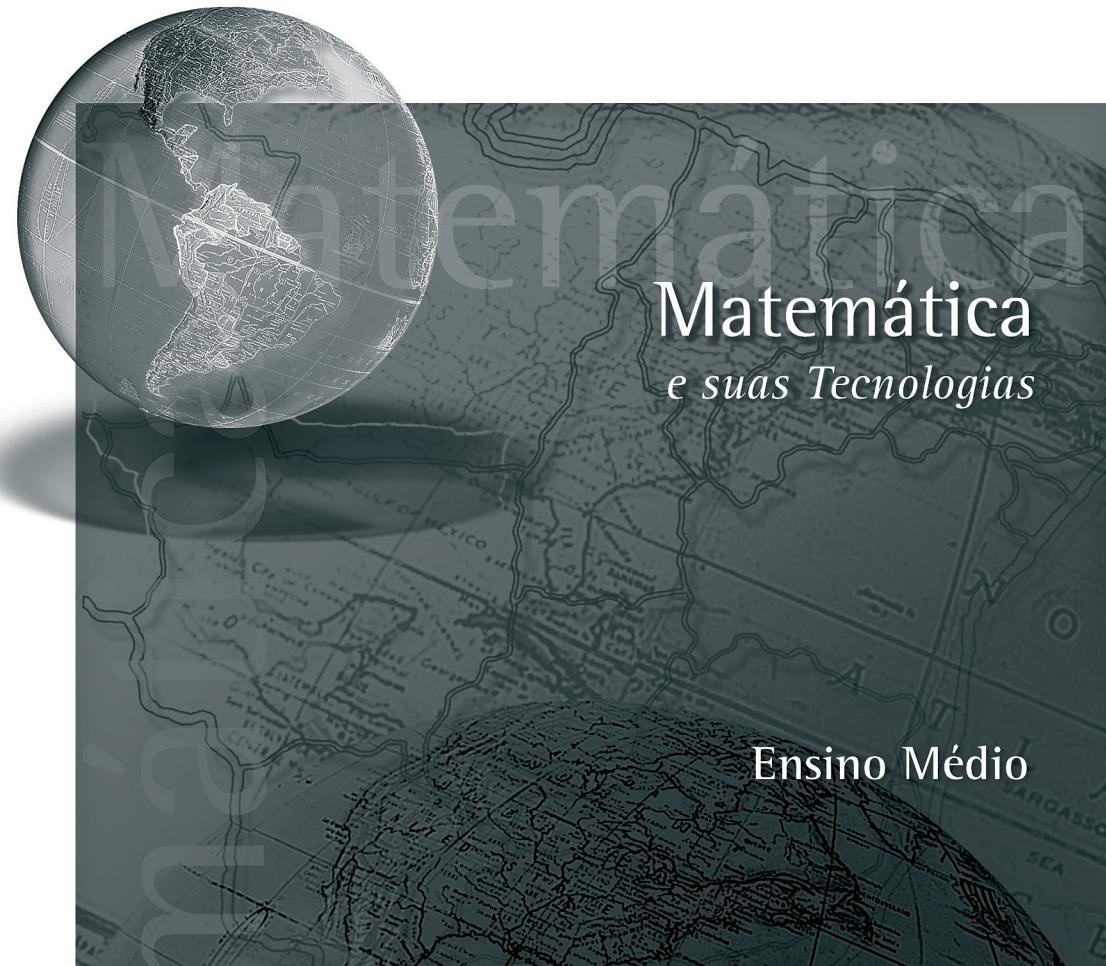
c. 456 milhões de reais.

d. 224 milhões de reais.

e. Lucro de R$ 232 milhões de reais.

10 *Resposta (d).*

11 *Resposta (c).*

12 *Resposta (b).*

Orientação final

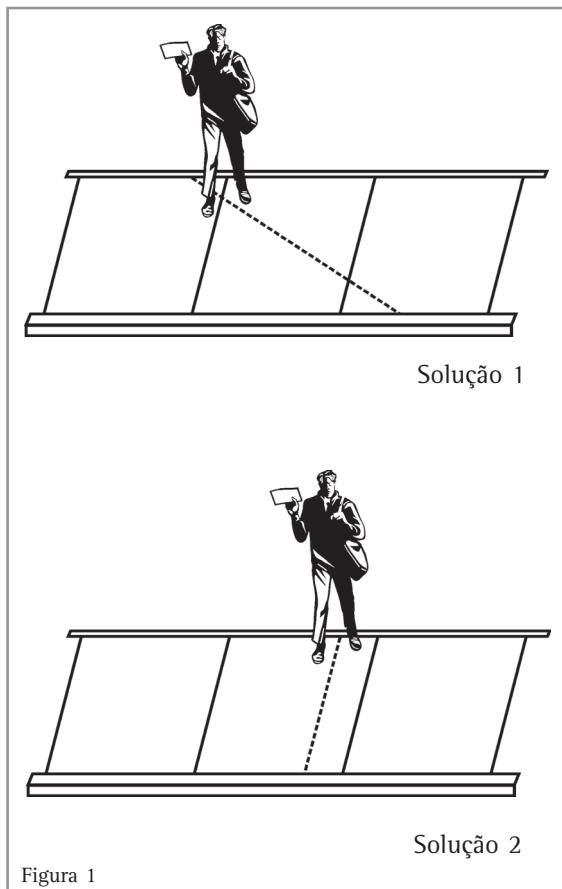
Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

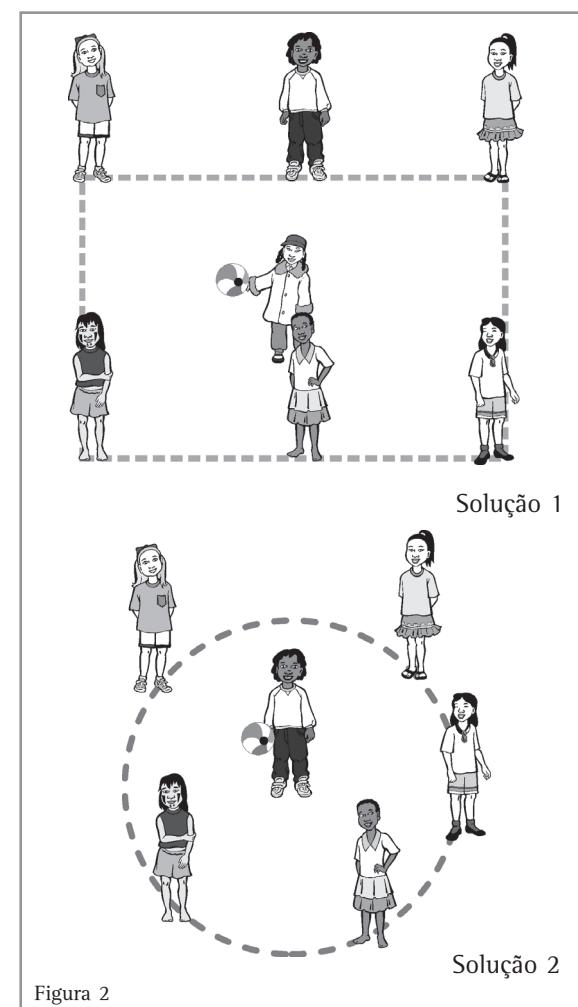
- Identificar, interpretar e representar os números naturais, inteiros, racionais e reais.
- Construir e aplicar conceitos de números naturais, inteiros, racionais e reais, para explicar fenômenos de qualquer natureza.
- Interpretar informações e operar com números naturais, inteiros, racionais e reais, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- Utilizar os números naturais, inteiros, racionais e reais, na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas de qualquer natureza.
- Recorrer à compreensão numérica para avaliar propostas de intervenção frente a problemas da realidade.

Capítulo IV

NOSSA REALIDADE E AS FORMAS QUE NOS RODEIAM

UTILIZAR O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO PARA REALIZAR A LEITURA E A REPRESENTAÇÃO DA REALIDADE E AGIR SOBRE ELA.

Marília Toledo

Capítulo IV

Nossa realidade e as formas que nos rodeiam

A sabedoria popular

Em nosso dia-a-dia, realizamos uma grande quantidade de ações que estão apoiadas em conhecimentos de vários tipos. Tudo é feito de um modo tão natural que nem identificamos o conhecimento que estamos usando.

Vejamos algumas situações nas quais isso ocorre:

Se você tiver que atravessar uma rua movimentada, qual o melhor trajeto: o (1), ou o (2)?

Figura 1

Imagine-se, agora, organizando um jogo em que você é encarregado de receber uma bola e passá-la a cada um dos demais jogadores. Em qual das posições, (1) ou (2), representadas abaixo, você distribuiria as pessoas para participarem do jogo?

Figura 2

Nossa experiência nos diz que, em cada caso, a solução (2) parece ser a mais conveniente, não é?

Se alguém nos pedir para justificar essas escolhas, diremos que estamos usando a “sabedoria popular” e não pensaremos mais no caso.

De fato, ao longo da história da Humanidade, foram surgindo, no dia-a-dia dos diversos povos, problemas que eles tiveram que solucionar. As soluções encontradas foram sendo passadas de pai para filho, formando essa “sabedoria” que todos nós possuímos. Alguns escritos que ficaram dos povos antigos, muitas vezes, descrevem alguma situação e a solução encontrada, justificando apenas que “fazendo assim, dá certo”.

Com o tempo, esses conhecimentos da “sabedoria popular” foram sendo organizados pelos estudiosos, que procuraram explicações lógicas para cada uma das situações e de suas soluções.

Desse modo, foi-se organizando um conjunto de conhecimentos, que até hoje continua sendo ampliado e aprofundado.

Nas situações apresentadas, podemos dizer que os conceitos usados são de **natureza geométrica**.

A Geometria é uma parte da Matemática que estuda as figuras — sua forma, elementos e propriedades.

Vamos, então, analisar cada uma das situações apresentadas, pensando nos aspectos geométricos envolvidos.

- Na primeira situação, a intenção do pedestre é fazer o menor caminho possível, para ficar menos exposto ao movimento dos veículos. Podemos pensar em um desenho simplificado — um *modelo* — que irá nos ajudar a pensar melhor na situação:

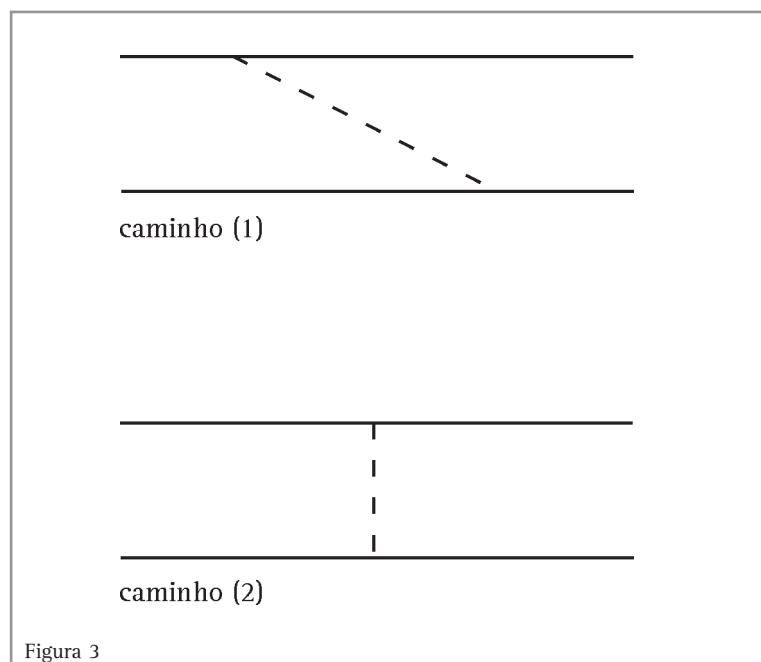
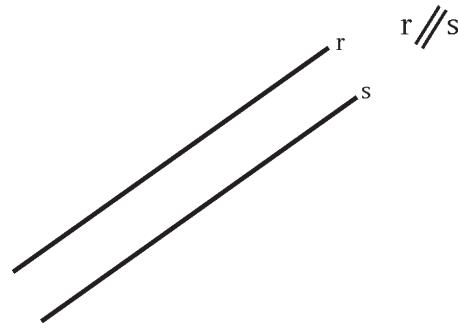
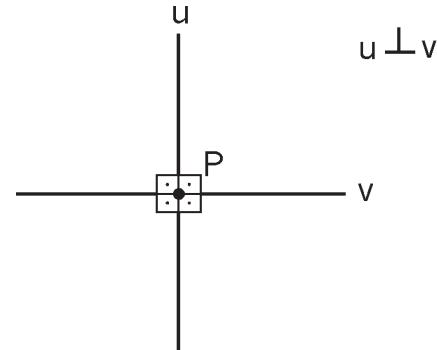



Figura 3

As duas beiradas das calçadas representam **retas paralelas** *e a menor distância entre elas é o segmento (pedaço) de reta* **perpendicular** *às duas.*

Nessa explicação, falamos em “retas paralelas” e em “retas perpendiculares”. Vamos entender melhor o que isso significa:

Duas retas que estão em um mesmo plano podem ser:

Paralelas*, se não se encontram;*

Perpendiculares*, se elas se encontram em um ponto, separando o plano em quatro regiões iguais (ou seja, se elas formam quatro ângulos retos);*

Oblíquas*, se elas se encontram em um ponto, separando o plano em regiões diferentes duas a duas (ou seja, formam dois ângulos maiores que o ângulo reto e dois, menores).*

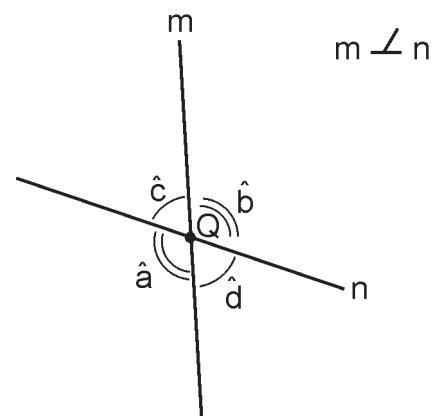



Figura 4

Repare nas características das faixas de pedestres sinalizadas nas ruas muito movimentadas: encontram-se em posição perpendicular às guias das calçadas e as listas que as formam são paralelas entre si.

Além do exemplo das ruas, faixas de pedestres e calçadas, você pode encontrar muitos outros objetos da nossa realidade que poderiam ser representados por retas paralelas. Pense em alguns exemplos.
Do mesmo modo, você pode observar modelos de retas perpendiculares na rua, no seu trabalho, em sua casa, como, por exemplo, nos batentes das portas.
Procure outros exemplos.

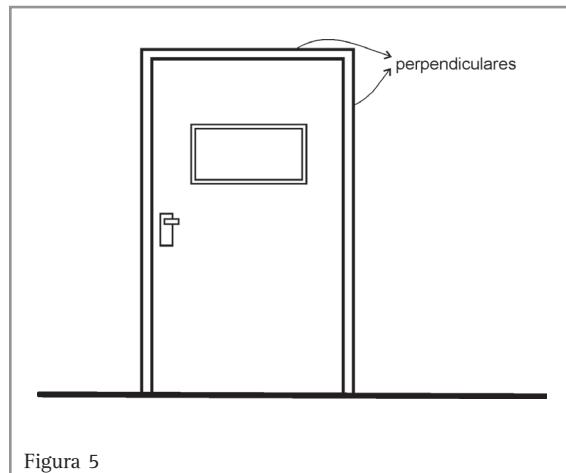



Figura 5

- Na segunda situação, em que se organiza um jogo com bola, é mais justo que todas as pessoas estejam à mesma distância do jogador central, para terem facilidades iguais de pegar e jogar a bola. Por isso, a melhor escolha é que suas posições formem uma **circunferência**, como na 2ª solução do problema apresentado na página 88.

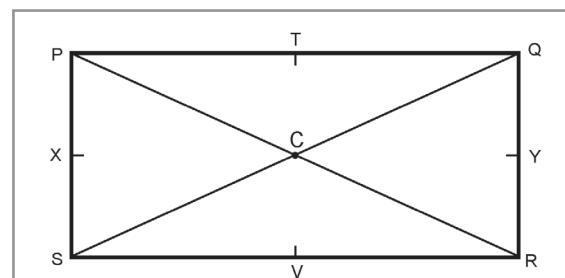
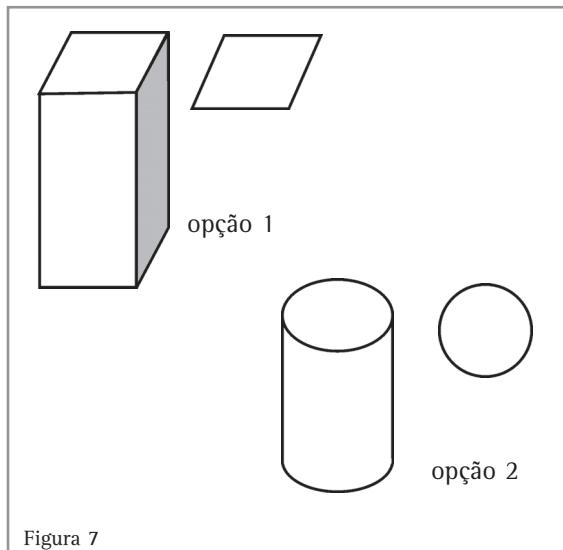



Figura 6

Vejamos como fica a situação dos jogadores na 1ª solução do problema da página 88. Novamente, vamos usar um *modelo* da situação (uma figura simplificada), que nos permite analisar melhor o que está ocorrendo. A figura formada é um **retângulo**. Observe que os pontos assinalados se encontram a distâncias diferentes do centro.

Os jogadores mais prejudicados são os que se encontram nos **vértices** P, Q, R, S do retângulo, pois estes são os pontos mais distantes do centro.

Desenvolvendo competências

1

Repare que, no retângulo, podemos observar lados perpendiculares: o lado $\overline{PQ}$ e o lado $\overline{QR}$, por exemplo, formam um par de segmentos de retas perpendiculares. Indique outros pares de lados perpendiculares no retângulo.

No retângulo, também podemos observar pares de lados que são paralelos. Quais são eles?

Vamos pensar em uma outra situação de nossa realidade.

Você já prestou atenção à forma de um poço ou de uma panela com tampa que fecha bem justinho?

Tente descobrir um motivo para a escolha da forma desses objetos ser sempre a da opção 2 e não a da opção 1.

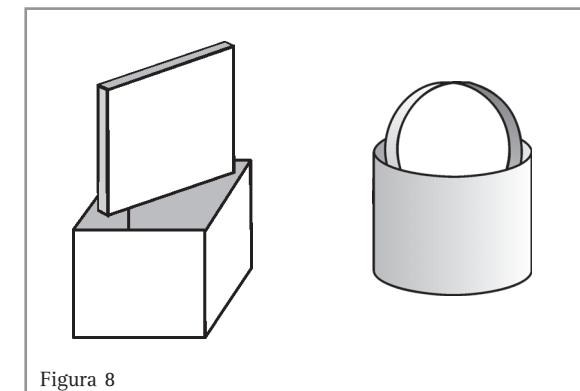
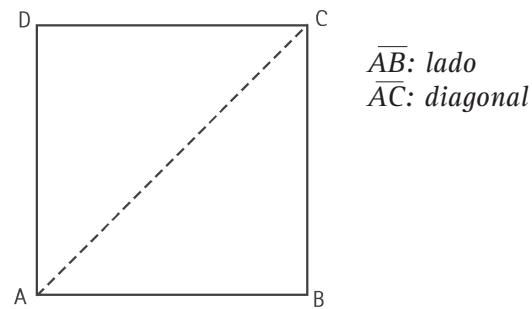



Figura 7

Se você quiser saber mais...

A figura da opção 1 tem a forma de um prisma de base quadrada (ou paralelepípedo) e a figura da opção 2 tem a forma de um cilindro.

Um bom argumento para justificar essa escolha pode ser verificado por você. Pegue duas embalagens de produtos quaisquer, uma com a 1ª forma apresentada e outra com a 2ª forma, sem uma das tampas. Você deve construir uma tampa para cada embalagem, apoiando-a sobre um papel grosso, desenhando o contorno da parte a ser tampada e depois recortando-o. Agora, tente guardar cada tampa dentro da sua respectiva caixa, sem dobrá-la nem amassá-la.

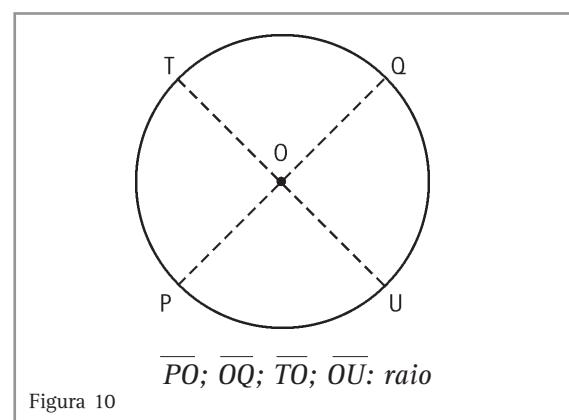
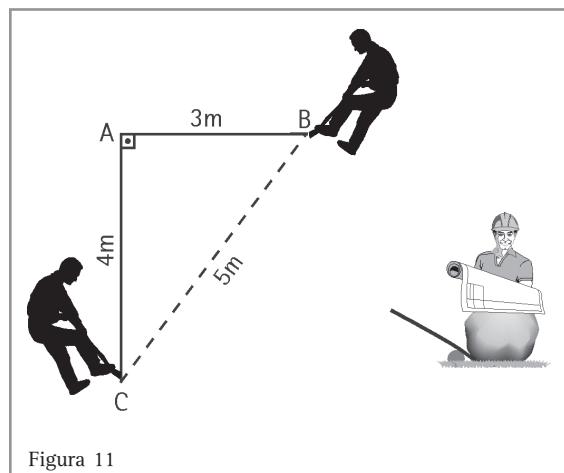
Você deve ter notado que apenas a tampa da 1ª embalagem pode ser guardada nas condições do problema, isto é, sem ser dobrada nem amassada. Isso quer dizer que se o poço ou as panelas tivessem a 1ª forma haveria o risco de se deixar a tampa cair no fundo!

- No caso de o poço (ou da panela) ter forma de um prisma de base quadrada, sua tampa terá a

Figura 8

forma de um quadrado. Então, se encaixarmos o **lado** da tampa na **diagonal** da boca do poço, certamente a tampa irá ao fundo. (Pense na situação do pedestre atravessando a rua).

Figura 9

- No caso de o poço ter a forma cilíndrica, sua tampa será redonda, e nunca irá para o fundo, pois, no círculo, qualquer um de seus pontos estará a uma mesma distância do centro (distância igual ao raio). (Pense nas crianças jogando bola).

Figura 10

Um famoso teorema: o de Pitágoras

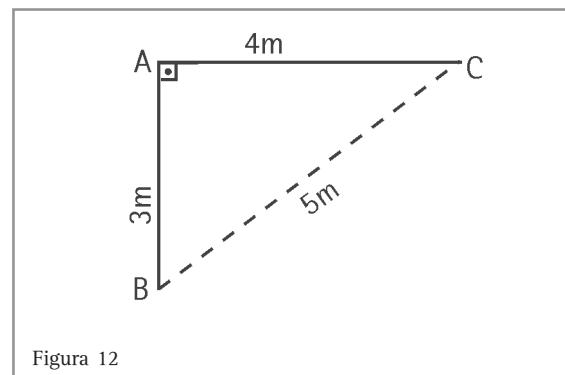
Você já observou o início da construção de uma casa?
Ela se inicia pela marcação do terreno, indicando-se no chão cada aposento, com barbante e estacas. Em geral, as paredes formam ângulos retos, ou "ficam no esquadro", como se costuma dizer. E como é que os trabalhadores da obra têm certeza disso?

Existe um modo prático de resolver o problema, que é o seguinte:

Figura 11

• prende-se um fio de barbante em uma estaca A e ele é esticado até uma estaca B, de modo que o barbante fique com 3 metros de comprimento entre A e B;
• repete-se a mesma operação entre a estaca A e uma outra C, de modo que o novo barbante fique com comprimento de 4 metros entre A e C.

A operação seguinte é mais delicada: para posicionar a estaca C de modo que as futuras paredes fiquem "no esquadro", é necessário esticar-se novo fio de barbante de B a C, para que a distância entre essas duas estacas seja exatamente 5 metros.

Quando não se consegue isso, deve-se modificar um pouco a posição da estaca C (daí, a necessidade do "golpe de vista" do chefe da obra). Com isso, forma-se um ângulo reto entre os fios AB e AC.

Figura 12

Pense no triângulo que foi construído: as medidas de seus lados são 3, 4 e 5 metros. Existe uma relação muito interessante entre estes números:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ou

$$9 + 16 = 25$$

$$(3^2 = 3 \cdot 3; \; 4^2 = 4 \cdot 4; \; 5^2 = 5 \cdot 5)$$

Um pouco de História...

*Há muitos séculos (há cerca de 5000 anos), desde os tempos em que os **egípcios** construíram suas pirâmides, eles já sabiam dessa relação: em todo triângulo que tem lados com as medidas 3, 4 e 5 unidades, forma-se um **ângulo reto** entre os lados que medem 3 e 4 unidades. Naquele tempo, ainda não se usava a unidade de medidas de comprimento em "metros". O que os operários egípcios faziam era preparar uma corda com 13 nós, com o cuidado de deixar sempre a mesma distância (a unidade de medida escolhida por eles) entre um nó e outro. Prendia-se a corda no chão, com as estacas, no primeiro nó, no quarto e no oitavo, deixando 3 espaços e 4 espaços entre essas estacas. O décimo terceiro nó deveria coincidir com o primeiro (a posição do oitavo nó era a mais importante: ela deveria ser corrigida, se necessário). Com isso, eles tinham certeza de ter um ângulo reto, formado entre os lados que se uniam na segunda estaca.*

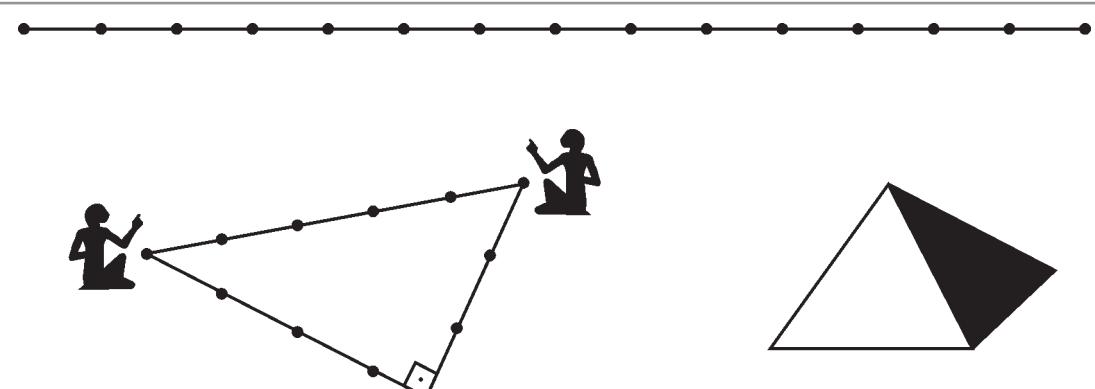



Figura 13

*Só muito mais tarde (por volta do século VI a.C.), os **gregos** começaram a se preocupar em recolher os conhecimentos dos povos e a tentar organizá-los e explicá-los. Um de seus trabalhos se referiu exatamente a essa relação entre as medidas dos lados dos triângulos que têm um ângulo reto: eles descobriram que a relação vale não só para os triângulos de lados medindo 3, 4 e 5 unidades. Eles descobriram que, sempre que um triângulo possui um ângulo reto, o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Chamaram o lado maior de "hipotenusa" e os outros dois lados de "catetos". Essa descoberta ficou conhecida como "teorema de Pitágoras", em homenagem a um dos maiores filósofos daqueles tempos. O teorema ficou conhecido da seguinte forma:*

Em todo o triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos dois catetos.

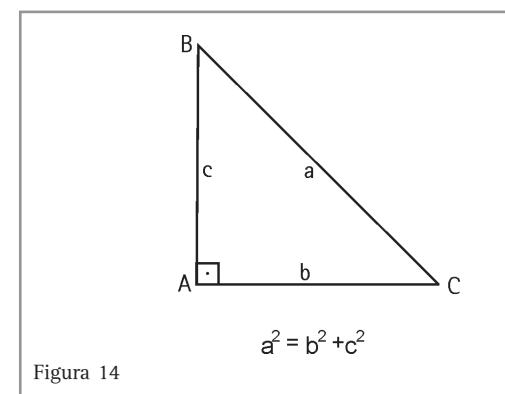



Figura 14

*Atualmente, quando precisamos medir ou desenhar um ângulo reto, utilizamos o **esquadro**, um instrumento bastante simples, barato e fácil de se usar.*

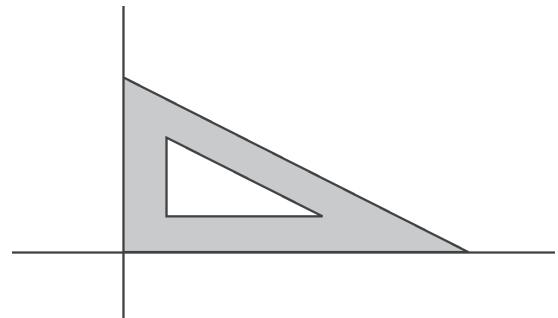



Figura 15

O triângulo retângulo mais famoso é o que possui lados medindo 3, 4 e 5 unidades, pois esses números são bastante simples de se memorizar.

Outro trio de números inteiros para os quais também vale a relação é: 5, 12, 13. Verifique:

- com auxílio do esquadro, construa um ângulo reto;
- deixe um dos lados do ângulo com 5 cm de comprimento e o outro, com 12 cm;
- ligando as extremidades dos dois lados, você irá obter o terceiro lado de um triângulo. Meça esse lado. Se você não encontrou 13 cm, confira com o esquadro se o ângulo que você traçou está mesmo com 90 graus, isto é, se ele é um ângulo reto, para que você tenha um triângulo retângulo.

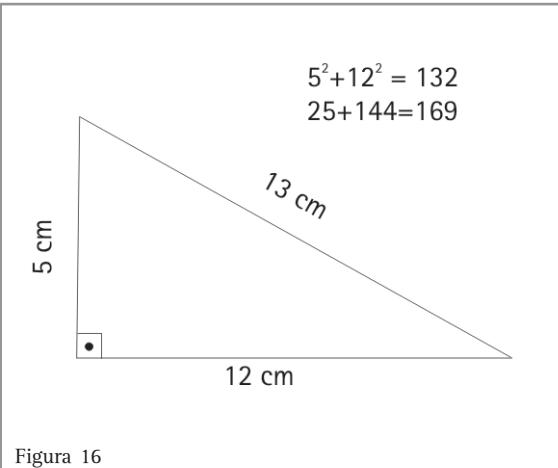



Figura 16

Se você quiser saber mais...

Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo são expressas por três números naturais, esses números são chamados "pitagóricos". Já sabemos que as medidas 3, 4 e 5 representam um desses trios de números pitagóricos. Você pode obter novos trios, multiplicando essas medidas por 2, 3, 4, ou qualquer outro número natural (maior que 1).
*Os triângulos que você irá obter com essas novas medidas são **semelhantes** ao primeiro, pois têm a mesma forma (os mesmos ângulos) que ele, só mudando os comprimentos dos lados.*
Você pode fazer o mesmo com os números pitagóricos 5, 12 e 13, ou com qualquer outro trio.

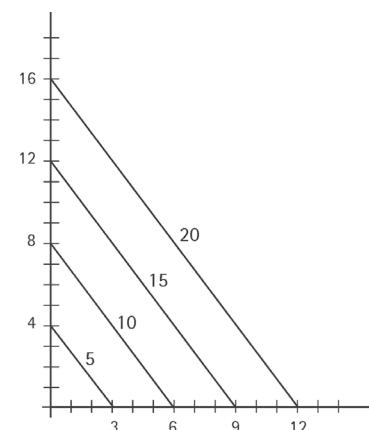
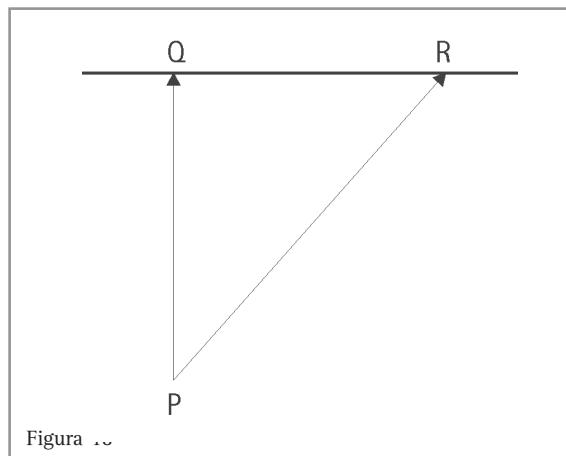



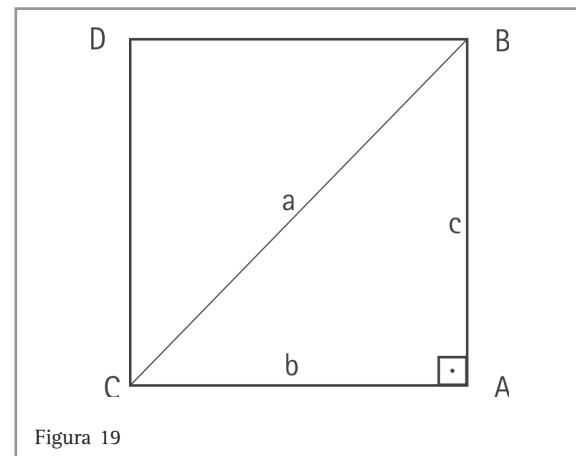
Figura 17

Voltando aos problemas do pedestre e do poço

Agora que já foi discutido o teorema de Pitágoras, você pode retomar os problemas citados, realizando alguns cálculos.

- Vejamos o problema do pedestre: é possível desenharmos um *modelo* da situação, onde fica clara a representação de um triângulo retângulo.

Figura 18

Vamos imaginar que a rua tem 8 metros de largura. Então, o pedestre poderá fazer a travessia perpendicularmente às calçadas, ou atravessar a rua seguindo uma direção oblíqua.

Imaginemos que, pelo caminho oblíquo, ele chegue à calçada oposta em um ponto (R) que está 6 metros abaixo do ponto de partida (P), na outra calçada.

Teremos aí um modelo de triângulo retângulo.

Localize as medidas dadas, nesse modelo, para concluir quantos metros o pedestre irá percorrer em cada trajeto.

- Vamos pensar, agora, no problema de colocar a tampa na boca de um poço, se ela for quadrada.

Imaginemos que a boca do poço forma um quadrado, em que cada lado tem 1 metro de comprimento.

Figura 19

Novamente, podemos desenhar um *modelo* da situação, em que aparece um triângulo retângulo, formado por dois lados e pela diagonal do quadrado. Vamos usar as indicações:

a = medida de $\overline{CB}$

b = medida de $\overline{AC}$

c = medida de $\overline{AB}$

Desenvolvendo competências

2

Aplique, no triângulo ABC, a relação de Pitágoras e descubra quanto mede a diagonal $\overline{CB}$ da boca do poço.

Observação: Você vai precisar do valor de $\sqrt{2}$. Use 1,41.

E por falar em construções ...

Você já deve ter visto uma casa sem forro. Deve, então, ter reparado que, servindo como estrutura para o telhado, quase sempre encontramos uma "tesoura": uma construção de madeira, com forma triangular.

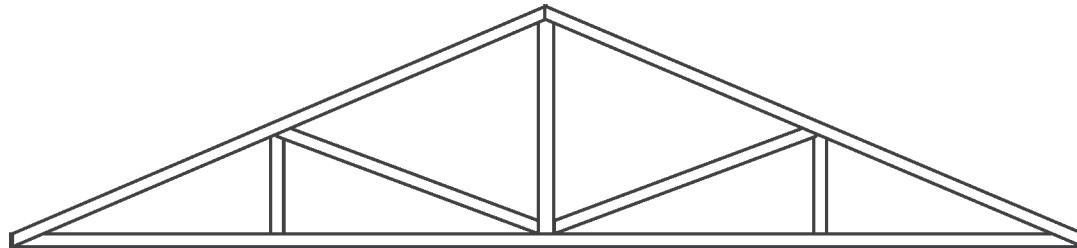



Figura 20

Resolvendo o problema

Você já pensou no motivo que leva os carpinteiros a escolherem sempre a forma triangular para essa estrutura? Por que será que não a fazem em forma quadrada, retangular, ou qualquer outra?
Para encontrar a resposta para essa questão, faça a seguinte experiência:
Corte sete pedaços de canudinhos de refresco e, com um fio de linha ou de barbante, construa um retângulo e um triângulo. Pegue cada uma dessas figuras e puxe-a por um de seus lados, tomando o cuidado de não dobrar, nem entortar nenhum dos canudinhos. Você irá verificar que o retângulo muda de forma à medida que você for puxando seu lado, enquanto que o triângulo apresenta maior resistência à deformação, a ponto de só mudar de forma se for destruído.
Dizemos que, de todas as figuras que podemos construir com três lados, quatro lados, ou mais, a única que tem a propriedade da ***rigidez*** *é o triângulo.*

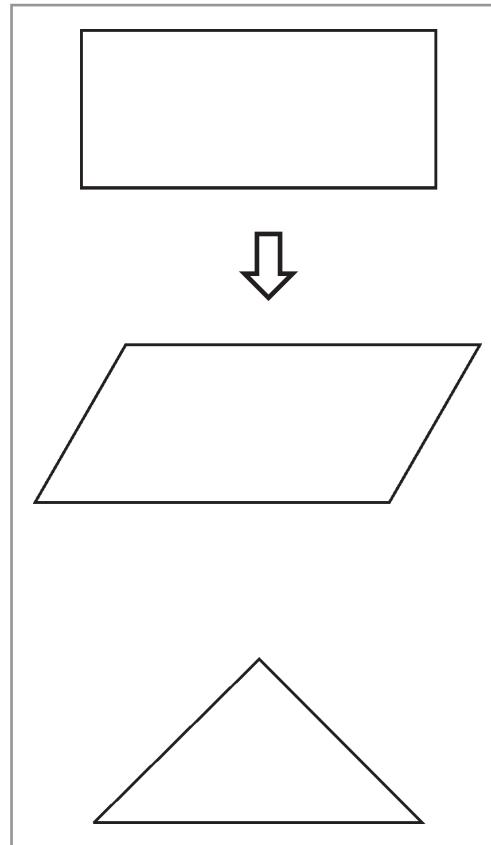



Figura 21

Nessa experiência você deve observar que a rigidez do triângulo, isto é, sua maior resistência à deformação, é que justifica o uso dessa forma em diversas construções vistas hoje em dia. Procure em sua casa, bairro ou cidade, objetos ou construções em que foram usados triângulos e verifique se esse uso foi para garantir maior resistência à deformação do objeto ou da construção.

Desenvolvendo competências

3

Você já deve ter visto um portão como o da figura ao lado, com ripas de madeira. Se fosse você que o tivesse construído, qual dos argumentos abaixo você usaria para justificar o uso da ripa colocada em diagonal?

a) *Ela é necessária para se pregar as madeiras que formam o portão.*

b) *Ela é necessária para deixar o portão mais bonito e mais fácil de abrir.*

c) *Ela é necessária porque forma triângulos com as ripas verticais e com as horizontais, impedindo que o portão se deforme.*

d) *Ela é necessária para deixar o portão mais resistente contra as batidas.*

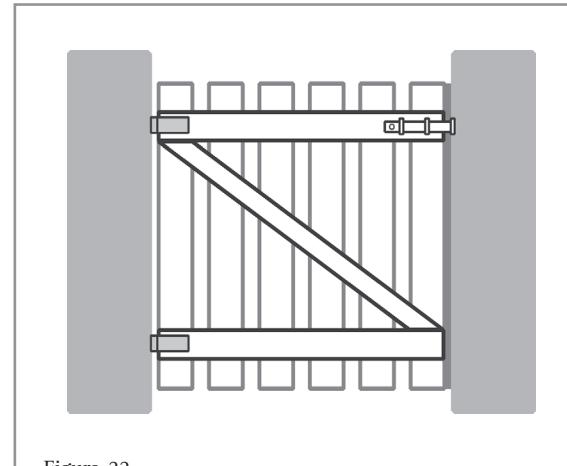
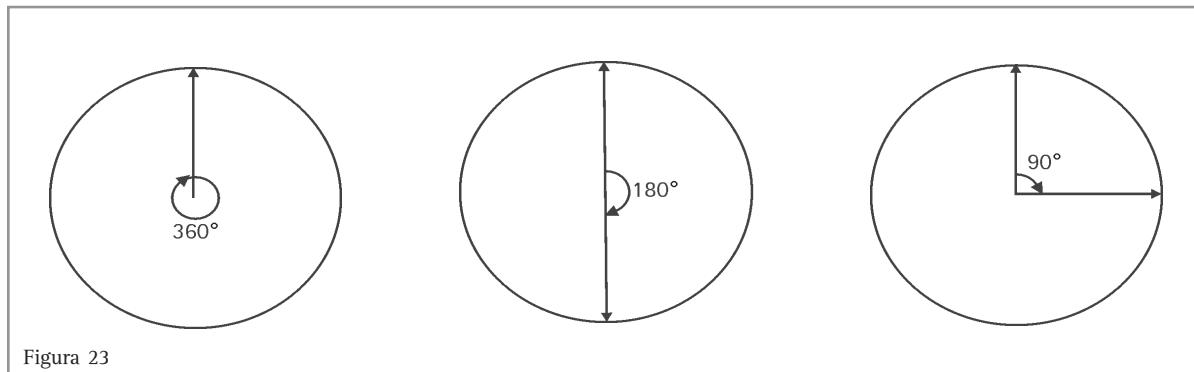



Figura 22

Conversando um pouco sobre ângulos

Você percebeu que, nesse texto, já nos referimos a ângulos retos como sendo aqueles que medem 90^{o} (lê-se noventa graus). Vamos então saber um pouco mais sobre ângulos.

Você já deve ter ouvido muitas pessoas usarem expressões como: "dar meia volta" , "dar uma volta", ou ainda "dar um giro de 180 graus", e assim por diante. Para entender melhor o significado dessas expressões e perceber o que elas têm a ver com ângulos, vamos pensar em um caso bem prático: o dos movimentos dos ponteiros de um relógio.

Quando o ponteiro dos minutos sai, por exemplo, de 12, dá a volta completa no mostrador e volta para o 12, dizemos que ele percorreu um "ângulo de uma volta" ou de "360 graus" (ou 360^{o}); se ele sair do12 e chegar ao 6, diremos que ele percorreu um "ângulo de meia volta", ou de "180 graus" (180^{o}); se ele sair do 12 e chegar ao 3, diremos que ele percorreu um "quarto de volta", formando um "ângulo reto", ou de 90^{o}. Nesse caso, diremos que as duas posições do ponteiro estão representando segmentos de retas **perpendiculares**.

Figura 23

Você verá nesse capítulo alguns usos dos ângulos em geometria e na resolução de problemas em situações cotidianas.

Uma outra propriedade importante dos triângulos

Faça a seguinte experiência: desenhe e recorte peças com formas triangulares diversas. A seguir, separe cada uma dessas peças em três partes, conservando seus ângulos, como na figura.

Agora, junte as três partes de cada uma das peças colocando-as lado a lado sem sobreposição, com todos os vértices em um mesmo ponto.

Observe que ao arrumar as partes assim, você formou sempre um ângulo de meia volta, isto é, um ângulo de medida igual a 180^o para qualquer das formas triangulares que você recortou.

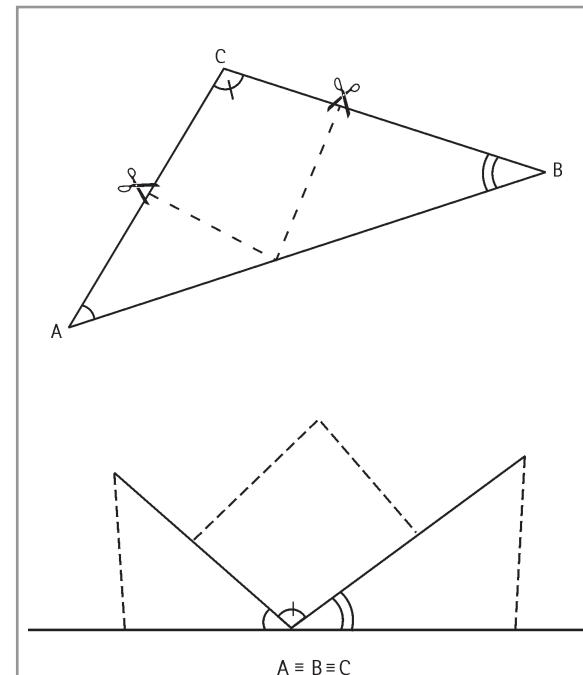



Figura 24

Os antigos gregos também descobriram essa propriedade que você acabou de verificar. Eles provaram que essa propriedade vale para **qualquer** triângulo e criaram o "teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo":

Em um triângulo qualquer, a soma das medidas de seus ângulos internos é igual a 180º.

Desenvolvendo competências

4

Uma questão para você: se um triângulo tiver todos os seus ângulos iguais, qual será a medida de cada um?

Um triângulo cujos ângulos têm a mesma medida tem também seus lados com mesma medida. Ele é chamado de triângulo eqüiângulo ou eqüilátero. Todo triângulo eqüiângulo e eqüilátero é chamado "triângulo regular".

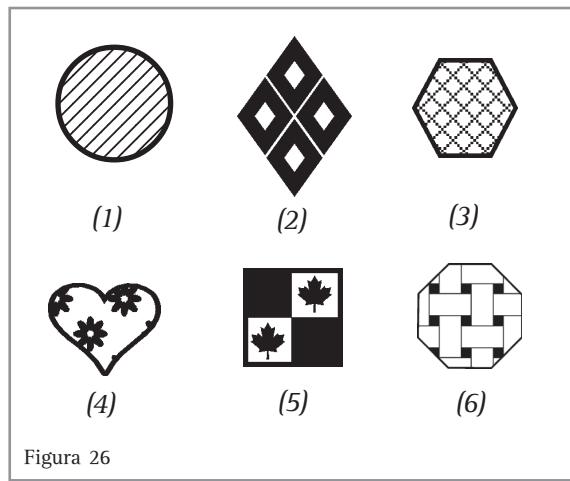
Geometria e arte

Vamos aproveitar o que aprendemos sobre os triângulos para construir um pequeno quadro todo recoberto de triângulos coloridos, de modo que não haja espaços vazios entre eles e nem sobreposição de figuras, isto é, os triângulos devem ser colocados lado a lado, sem que fiquem com alguma parte sobre o outro. Quadros assim formados são chamados de mosaicos.

Para construir seu mosaico, desenhe um triângulo, e, tomando-o como molde, recorte várias peças iguais em papéis coloridos (use folhas de revistas). Recorte em papel mais grosso um quadro para que você possa montar o mosaico sobre ele. Misture as peças coloridas, quanto mais colorido melhor.

Observe que, para fazer o mosaico sem deixar vãos e sem sobrepor as peças, é necessário encaixar os ângulos do mesmo modo que você fez na experiência anterior, isto é, formando um ângulo de medida 180º, ou de "meia volta". Para completar "uma volta inteira" você precisará formar outro ângulo de medida 180º e continuar assim até recobrir todo seu quadro.

Figura 25

Procure observar, em revistas, livros, ou mesmo exposições de pinturas, como muitos artistas fazem uso de figuras geométricas em seus trabalhos.

O pintor brasileiro Volpe, por exemplo, é autor de uma série famosa de quadros cujo tema são bandeirinhas, como as usadas em festas juninas. Procure conhecer alguma coisa da obra desse artista e você irá observar como ele lançou mão de figuras geométricas de forma criativa e bela!

Até aqui, você já pôde observar diferentes situações do cotidiano, em que estão envolvidos conceitos geométricos: figuras geométricas e suas propriedades. Você já deve ter percebido que, quanto mais dominarmos esses conceitos, mais condições teremos de compreender situações da realidade, desenvolver modelos geométricos para representá-las e, desse modo, encontrar soluções para problemas que podem surgir.

Escolhendo ladrilhos

Vamos, então, a mais um exemplo: o da escolha de ladrilhos.

Observe os seguintes "tipos" de ladrilhos:

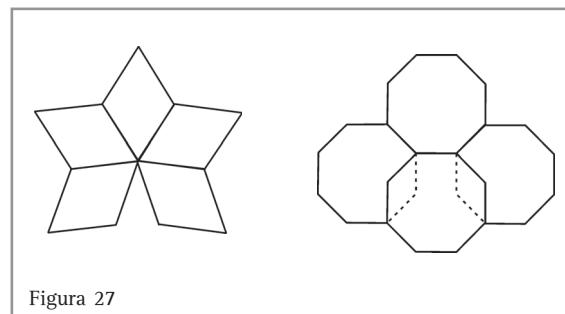
Figura 26

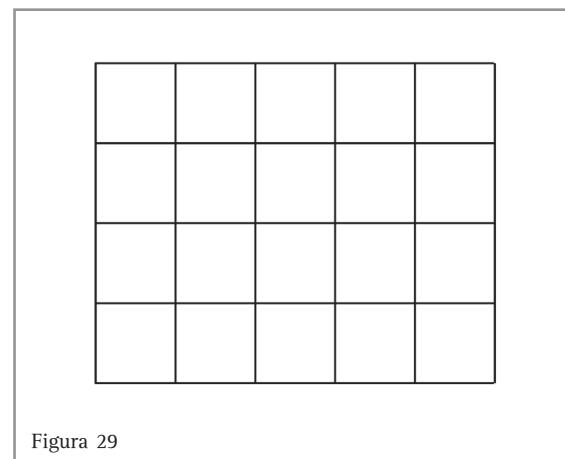
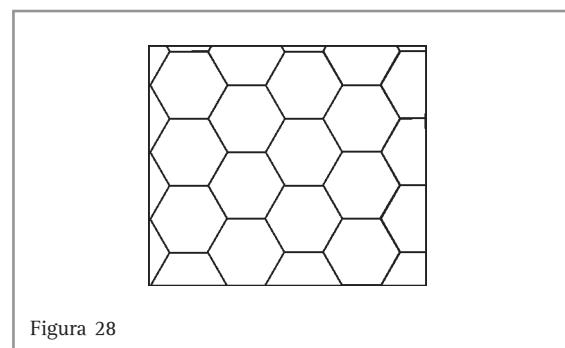
Quais deles você tem visto em pisos ou em lojas de materiais de construção?

Por que será que alguns deles não aparecem em nenhum mostruário dessas lojas?

Para encontrar uma resposta a essa questão, considere o seguinte problema:

Você deve ladrilhar uma sala retangular, usando:

- ladrilhos de um só tipo;
- sem que fiquem espaços entre os ladrilhos;
- sem ter que cortar ladrilhos, a não ser nas extremidades da sala, acompanhando os rodapés.

Escolha quais dos seis modelos acima poderão atender às condições dadas.

Se você tiver dúvidas em alguns dos casos, faça uma experiência, reproduzindo e recortando várias peças iguais ao ladrilho em questão.

Você deve ter descoberto que:

- os modelos arredondados não resolvem o problema, porque sempre deixam espaços entre um ladrilho e outro;
- dos modelos que apresentam contornos retos, nem todos resolvem o problema, porque alguns deixam espaços entre eles - é o caso do modelo (2) e, para outros, é necessário cortar algumas de suas partes, porque se sobrepõem - como é o caso do modelo (6).

Figura 27

Assim, sobraram apenas os modelos (3) e (5), que ficaram exatamente dentro das condições do problema dado.

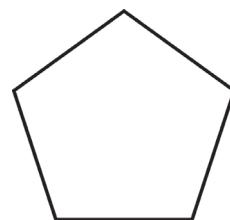
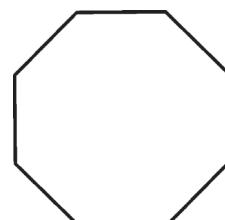



Figura 28

Figura 29

Qual será a explicação geométrica para isso?

Vamos estudar algumas características de figuras geométricas que são *modelos* dos ladrilhos que têm contornos retos: elas recebem o nome de **polígonos**.

Se você quiser saber mais...

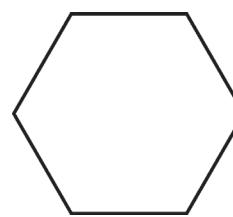
*A palavra **"polígono"** vem do grego e significa "figura de muitos ângulos". (poli – muitos; gono – ângulo)*

Os nomes dos diferentes polígonos são dados a partir do total de ângulos (ou de lados) que eles possuem. Como esses nomes vêm do grego, temos nomes como:

Figura 30

Os artistas que criam os azulejos e ladrilhos para revestimentos sabem que não é prático nem decorativo deixar espaços sem revestimento. Por outro lado, sabem também que não é econômico ficar quebrando pedaços de ladrilhos. Então, o problema que se apresenta a esses artistas é o mesmo que foi apresentado a você, isto é, para prever quais as formas que serão mais adequadas para revestir pisos ou paredes usam *modelos matemáticos* para a representação de possíveis ladrilhamentos.

Como vimos até aqui, nossos ladrilhos têm formas poligonais; e os polígonos possuem "muitos ângulos". Estes ângulos têm um papel importante, quando se pensa em ladrilhamentos. Você viu que, conforme as aberturas dos lados dos ladrilhos (os ângulos dos polígonos), eles servem ou não para recobrir uma superfície sem deixar vãos ou se sobreporem.

Podemos pensar, então, que os ladrilhos que cobrem o piso sem deixar espaços entre eles têm as "aberturas" de seus lados de tal modo que, quando se juntam, formam um ângulo de "uma volta" em torno de um ponto:

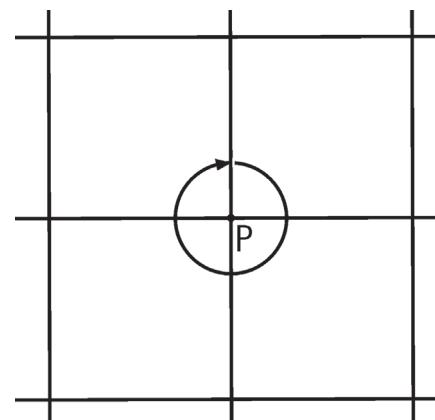



Figura 31

Para verificar isso, em cada caso, é necessário conhecermos cada um dos ângulos dos polígonos que servem de modelos para tais ladrilhos.

Desenvolvendo competências

5

Pensando na soma dos ângulos internos de um polígono de quatro lados (quadriláteros), como fizemos para os triângulos, assinale quais dos argumentos apresentados abaixo você considera corretos. É interessante que, antes de indicar os argumentos, você verifique com diferentes quadriláteros o que ocorre com a soma de seus ângulos internos, procedendo do mesmo modo que com os triângulos.

a) *A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 180º, como nos triângulos.*

b) *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero tem medida igual a 360º porque, quando encostados uns aos outros, eles formam "uma volta inteira".*

c) *A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º porque todo quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos e daí temos 180º + 180º = 360º.*

d) *A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, porque todo quadrilátero tem os quatro ângulos medindo 90º e 4 . 90º = 360º.*

Se quiser saber mais...

Assim como no caso dos triângulos, também há um tipo de quadrilátero que é chamado "regular", pois tem todos os seus ângulos com a mesma medida e todos os seus lados com o mesmo comprimento: é o quadrado.

Desenvolvendo competências

6

Que tal, agora, você verificar como estão seus conhecimentos até aqui?

Então, coloque V (verdadeiro) ou F (falso) em cada uma das afirmações, procurando justificar cada uma de suas respostas, baseando-se no que está sendo discutido.

a) *É possível construir um ladrilho com a forma de um triângulo regular, que tenha seus três ângulos internos medindo 70º cada. (   )*

b) *Se construirmos um quadrilátero PQRS que tenha ângulos de medidas: $m(\hat{p}) = 108^o$; $m(\hat{q}) = 94^o$; $m(\hat{r}) = 76^o$, então a medida do ângulo $\hat{s}$ deve ser 82º. (   )*

c) *Se um terreno tiver a forma de um triângulo com dois ângulos tais que um deles é reto e o outro é obtuso (de medida maior que 90º), seu terceiro ângulo deverá ser agudo (de medida menor que 90º). (   )*

d) *É possível construir um quadrilátero que tenha apenas um ângulo reto, e os demais ângulos com medidas diferentes de 90º. (   )*

e) *É possível construir um quadrilátero que tenha três ângulos retos e apenas um ângulo de medida diferente de 90º. (   )*

Agora, já temos uma justificativa geométrica para o fato de não encontrarmos à venda alguns tipos de ladrilhos, como os dos tipos 1, 2, ou 4 de nosso problema inicial.

Depois da escolha, a compra!

Aproveitando o tema do ladrilhamento, imagine, agora, que você já escolheu o tipo de ladrilho ideal para revestir sua sala, que é retangular, com lados medindo 3m e 4m. O passo seguinte é fazer a compra. Para isso, você deverá calcular quantidade e preços.

Em geral, o vendedor possui uma tabela — impressa em papel ou registrada no computador da loja — onde há as informações sobre o ladrilho escolhido. Veja um exemplo de tabela:

Modelo	Dimensões	Preço por unidade	Nº de unidades/caixa
Capri	40 cm *x* 40 cm	R$ 1,20	15
....	....	....	....

Tabela 1

Como “destrinchar” todos os dados contidos na tabela e fazer a tal compra?

• Em primeiro lugar: o que significa 1 m^2?

Se desenharmos, em um piso, um quadrado de 1 metro de lado, teremos uma superfície desse piso que mede 1m^2.

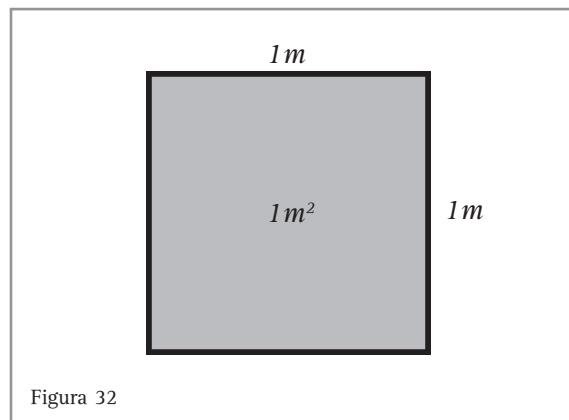



Figura 32

• Em segundo lugar: como saber quantos metros quadrados mede uma sala retangular de lados medindo 3m e 4m?

Vamos desenhar, no piso da sala, quadrados de 1m^2, para contar quantos cabem nesse piso.

No lado de 3 m, podemos acomodar os lados de 3 quadrados e, no lado de 4m, acomodamos os lados de 4 quadrados; assim, podemos dizer que temos 3 fileiras de 4 quadrados, ou seja:
$3 \cdot 4 = 12$ quadrados, o que nos indica que a sala mede 12m^2.

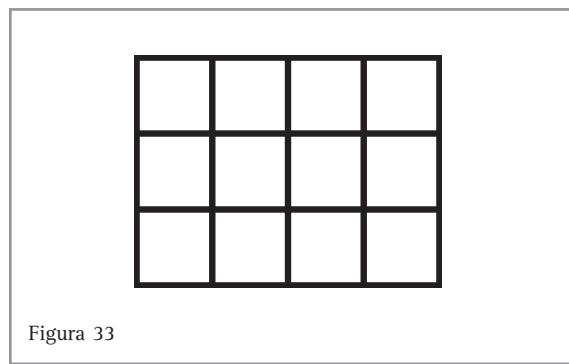



Figura 33

• O próximo passo é saber quantas caixas de ladrilhos deveremos comprar: cada ladrilho mede 40 cm por 40 cm, ou seja:
$0,4 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m} = 0,16\text{m}^2$.

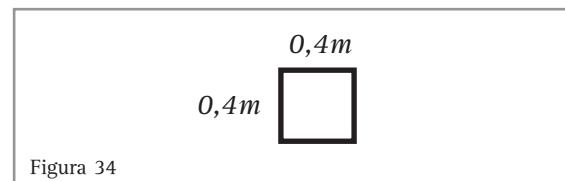



Figura 34

Cada caixa contém 15 ladrilhos, o que dá para cobrir uma superfície de 2,40 m^2. Descobrimos isso assim:

$15 \cdot 0,16 \text{ m}^2 = 2,40 \text{ m}^2$

Como será necessário cobrir uma superfície de 12 m^2, devemos calcular de quantas caixas precisaremos:

$12 \text{ m}^2 : 2,40 \text{ m}^2 = 5$

Isso quer dizer que, para ladrilhar a sala, são necessárias 5 caixas. Não podemos esquecer que em toda obra existe uma perda de material, isto é, alguns ladrilhos se quebram ao serem manuseados ou recortados para os cantos e, então, você precisará comprar alguns ladrilhos a mais para repor as possíveis perdas. É comum comprar-se, aproximadamente, 10% a mais do que o necessário.

• Finalmente, calculemos o preço da compra:

Necessitamos comprar 5 caixas de ladrilhos e cada uma contém 15 unidades, o que nos dá um total de 75 ladrilhos. Calculamos assim:

$5 \cdot 15 = 75$

Calculando 10% desse total, teremos: $75 \cdot \frac{10}{100} = 7,5$

Como não é possível comprar 7 ladrilhos e meio, acrescentaremos 8 ladrilhos no total calculado anteriormente:

$75 + 8 = 83$

Cada unidade custa R$ 1,20, o que nos permite calcular: $83 \cdot 1,20 = 99,60$.

Então, o preço total será R$ 99,60.

Uma questão para você refletir

Quantos conhecimentos matemáticos estão por trás de uma simples compra de ladrilhos, não?

Naturalmente, hoje a maioria das lojas conta com programas de computador que realizam todos esses cálculos. Mas, para isso, houve alguém que tinha o domínio dos conceitos aqui discutidos, para poder programar o computador!

E como é bom saber que temos computadores à nossa disposição, mas não dependemos deles, porque dominamos os conceitos necessários para resolver o problema!

Pense em uma outra situação de compras em seu dia-a- dia e procure listar quantos conceitos matemáticos estão envolvidos nela.

Essas experiências servem para nos mostrar quanto de Matemática conhecemos e utilizamos, sem sequer nos darmos conta disso!

Vejamos uma outra situação em que você utiliza naturalmente vários conhecimentos geométricos.

Uma figura vale por mil palavras ...

Esse é um velho ditado, cujo espírito tem sido muito explorado por vários profissionais, entre eles os que lidam com comunicação e propaganda. Os especialistas em Estatística também utilizam muito esse recurso para transmitir suas informações, de maneira clara e rápida, por meio de vários tipos de **gráficos** encontrados em jornais, revistas, noticiários de TV etc.

Os aspectos geométricos das figuras utilizadas fornecem o impacto visual para as pessoas de modo a destacar o que os gráficos representam.

Observe alguns exemplos:

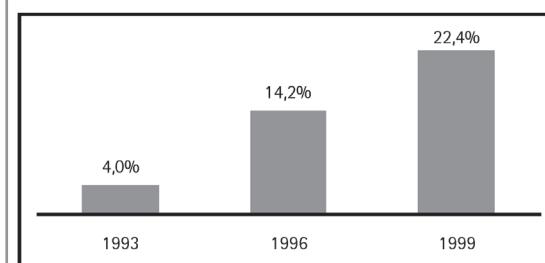



Figura 35 – Adaptado da Revista *Época*, 25/02/2002.

Nesse **gráfico de colunas**, a ordem de grandeza de cada um dos números nos é mostrada pela altura de cada um dos ***retângulos***, todos eles apresentando a mesma base. Observe que o aumento da porcentagem é facilmente visualizado pelo aumento da altura dos retângulos.

PESQUISA MOSTRA QUE O POVO CONFIA NO PENTA! O BRASIL SERÁ CAMPEÃO?

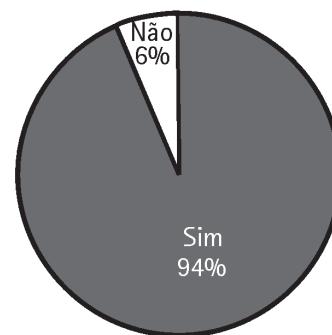
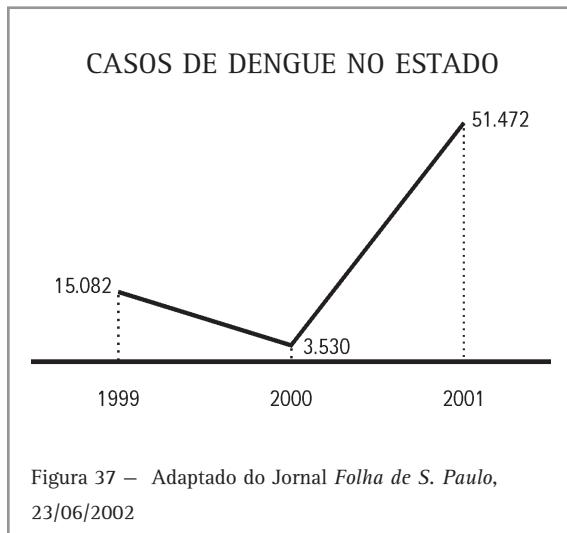



Figura 36 – Adaptado do Jornal *O Estado de S. Paulo*, 22/06/2002.

Nesse **gráfico de setores,** conhecido como "gráfico de pizza", temos o círculo, separado em regiões por meio de ângulos, determinando setores circulares.

Observe como fica fortemente evidenciado pelo grande setor circular que a maioria dos brasileiros acreditava que o Brasil seria pentacampeão mundial de futebol.

Figura 37 — Adaptado do Jornal *Folha de S. Paulo*, 23/06/2002

Esse gráfico, constituído por uma **poligonal das freqüências**, nos indica as variações da grandeza considerada por meio das alturas atingidas pelos extremos dos *segmentos de reta* que formam essa *linha poligonal*.

Observe como os segmentos de reta que ligam os pontos assinalados nos anos de 1999, 2000 e 2001 registram os "altos e baixos" sofridos pelo fenômeno considerado, ao longo do tempo. É fácil visualizar que houve uma diminuição de casos registrados em 2000 e um grande aumento em 2001.

Construindo caixas

Até aqui, temos trabalhado com pontos, segmentos de reta, círculos, retângulos etc, figuras conhecidas como **figuras planas,** que servem de modelo para várias situações de nosso cotidiano. No entanto, em outras situações precisamos de modelos **não planos** para representar os objetos com os quais convivemos.

Vamos, então, analisar algumas figuras geométricas desse tipo:

- Você já verificou que os ladrilhos que cobrem o piso sem deixar espaços entre eles têm seus ângulos internos de tal modo que, quando se juntam, formam um ângulo de "uma volta", ou 360^{o}, em torno de um ponto.

Assim, no caso dos ladrilhos quadrados, são necessários quatro deles para completar 360^{o} $(4 \cdot 90^{o})$.

Desenvolvendo competências

7

Se unirmos apenas três desses ladrilhos, como na figura ao lado, quantos graus tem o ângulo indicado?

Faça a seguinte experiência: recorte três pedaços quadrados e iguais, em papel, e una os três, em torno de um mesmo vértice, usando fita adesiva.
Como você deve ter verificado, a figura obtida forma um "bico" que não fica com todos os seus pontos apoiados em um único plano.
*Forma, portanto, uma **figura não plana**.*

Figura 38

Desenvolvendo competências

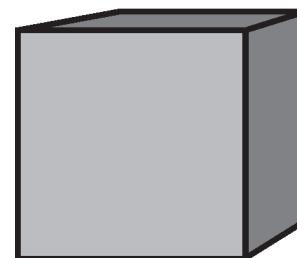
8

Se você construir outro "bico" igual a este e depois unir os dois de maneira adequada, terá uma caixa em forma de ***cubo*** *(como um dado).*

Responda e justifique sua resposta:

Essa caixa é uma figura plana ou não plana?

Figura 39

Examine a caixa construída e verifique quantas superfícies quadradas de papel você usou para montá-la. Cada uma dessas superfícies é chamada **face** do cubo.

Vamos, agora, a outra experiência:

Desenhe um triângulo eqüilátero, de lados medindo 4 cm. Recorte, em papel, quatro figuras iguais a esta. Agora, faça uma construção semelhante à que você fez com os recortes quadrados: una três figuras triangulares, em torno de um mesmo vértice, com fita adesiva, de modo a obter um "bico".

Use o quarto recorte triangular como tampa para fechar essa caixa, que tem a forma de uma **pirâmide**.

Observe essa caixa e verifique quantas **faces** ela possui.

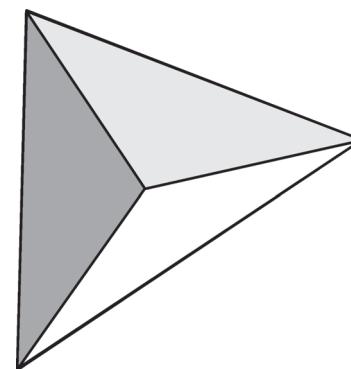



Figura 40

Dizemos que cada uma das caixas apresentadas tem a forma de um poliedro.

Você já sabe que a palavra **polígono** vem do grego.

Lembra-se de como ela foi formada e qual o seu significado (poli + gono)?

E a palavra **poliedro**, o que, então, poderá significar?

Se, pensando nas construções feitas, você respondeu “figura de muitas faces”, acertou!

Como você já sabe, “poli” significa “muitos” e “edro” significa “face”.

Procure se lembrar de alguns objetos da sua vida cotidiana que têm forma de um **cubo**. Ao pensar nessas figuras, você pode ter se lembrado de uma caixa de sapatos, mas deve ter percebido que ela é um pouco diferente, não é?

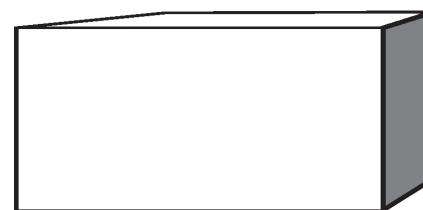
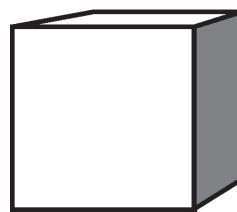



Figura 41

Desenvolvendo competências

9

Três tarefas para você:

1) *Faça uma lista de semelhanças e outra de diferenças entre a caixa que tem forma de cubo e a caixa de sapatos;*
2) *Que tipos de recortes em papel você poderia fazer para construir dois “bicos” (como fez para o cubo) e uni-los, formando uma caixa como a de sapatos?*
3) *Faça desenhos representando essas faces. A seguir, recorte-os e tente construir a caixa para verificar se você imaginou corretamente.*

Procure, agora, listar alguns objetos que você conhece, no seu dia-a-dia, que têm a forma de **pirâmide**.

É possível que, entre outras coisas, você tenha se lembrado de ter visto fotos ou ilustrações das famosas pirâmides do Egito, construídas há cerca de 5000 anos. Elas são pirâmides como essa da figura.

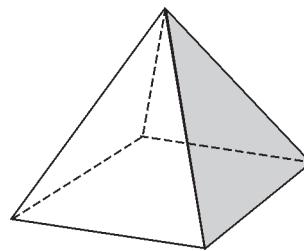



Figura 42

Desenvolvendo competências

10

Agora, responda e faça:

a) Que figuras você recortaria em papel para montar uma pirâmide como a dos egípcios?

b) Desenhe e recorte figuras como você imaginou e verifique se você consegue montar essa pirâmide.

Comparando prismas e pirâmides

Sua nova tarefa é: compare caixas com forma de prismas e caixas com forma de pirâmides e liste as diferenças que você encontra entre elas.

É possível que, entre as diferenças que você encontrou, estejam as seguintes:

No grupo dos prismas	*No grupo das pirâmides*
Todas as faces laterais são retângulos ou paralelogramos. As outras duas podem ter outras formas (as bases).	Todas as faces laterais são triângulos. A outra pode ter outras formas (a base).
Existem pares de faces que não se encontram (faces paralelas).	Não existe par de faces paralelas.
Cada grupo de 3 faces se encontra em um ponto diferente.	Existe um só ponto onde todas as faces laterais se encontram, com uma só exceção, a base (a face que pode não ser triangular).

Tabela 2

Se você não observou essas diferenças ao realizar a tarefa solicitada, pegue caixas em forma de prismas e de pirâmides e procure observar nelas as características descritas. Você poderá encontrar esses tipos de caixas como embalagens de vários produtos que estão à venda. Aliás, observe como embalagens com formas de prismas com bases triangulares ou hexagonais ou com formas de pirâmides chamam a atenção das pessoas. Uma embalagem "diferente" chega a ajudar a aumentar a venda de um produto.

Construindo novas caixas

Use meia folha de papel sulfite para enrolar, formando um “tubo”. Apóie, com cuidado, esse tubo sobre a metade da folha que sobrou, contornando com um lápis a “boca” do tubo.

Recorte dois círculos a partir do contorno obtido e feche com eles as duas “bocas” do tubo. Você tem uma nova caixa, bem diferente das outras que você construiu. Essa tem a forma de um **cilindro**.

Procure, à sua volta, objetos que apresentam a forma de um cilindro.

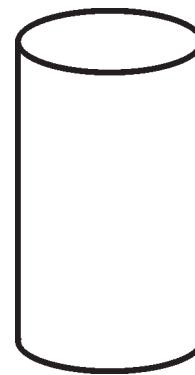



Figura 43

Desenvolvendo competências

11

Analise essa nova caixa e pense em como poderia completar a frase a seguir.
O cilindro não é um poliedro porque...

De fato, essa caixa não é um poliedro porque nem todas as suas partes são regiões planas. A própria forma dela nos dá uma indicação para o grupo ao qual ela pertence: grupo dos **corpos redondos**.

Agora, é a sua vez. Procure lembrar-se de alguns objetos do nosso dia-a-dia que também têm forma de corpos redondos.

Você pode ter se lembrado de um ovo, de uma bola e, também, de um chapéu de palhaço ou de uma casquinha de sorvete, que remetem à figura ao lado, que recebe o nome de cone. Ótimo! Você pode observar que, se apoiar qualquer um desses objetos sobre uma mesa, dependendo da posição, ele poderá rolar.

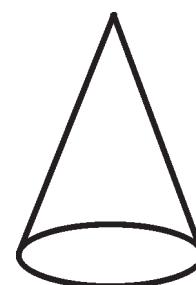



Figura 44

Resumindo...

Ao longo deste capítulo, você retomou uma série de conhecimentos práticos, que todos nós utilizamos, até sem perceber, e para os quais se procurou dar explicações baseadas em propriedades de figuras geométricas.

Analisou, também, alguns problemas que os homens foram tendo que resolver para facilitar seu modo de vida e como as soluções para eles podem ser encontradas com maior facilidade, quando se tem conhecimentos matemáticos.

Apenas alguns desses problemas foram apresentados, mas aqueles que se interessarem por esse tipo de estudos encontrarão muitos outros e, certamente, se tornarão cada vez mais hábeis em resolvê-los.

Você foi convidado, também, a executar algumas tarefas cuja intenção era contribuir para você aumentar suas habilidades em relação ao traçado e à construção de modelos. Esses modelos são muito úteis na resolução de situações-problema da vida real, pois neles são eliminadas as informações supérfluas e são representados apenas os elementos que nos permitem ter uma visão geométrica da questão. Por exemplo, ao examinarmos um portão empenado, o que nos importa é “ver” um conjunto de retas (as ripas do portão); onde deverá ser construída uma nova reta (a ripa em diagonal) que dará origem a um grupo de triângulos – figuras que, por sua propriedade de rigidez, irão impedir que o portão modifique sua forma, com o uso.

Esperamos que, assim, tenhamos contribuído para que você possa reconhecer que os conhecimentos matemáticos – e, em nosso caso, os geométricos – nos ajudam a compreender a nossa realidade e a agir sobre ela.

Conferindo seu conhecimento

1

"Outros pares de lados perpendiculares no retângulo"

• $\overline{PS}$ e $\overline{SR}$ ou $\overline{SR}$ e $\overline{RQ}$.

"Pares de lados paralelos no retângulo"

• $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{SR}$.

2

"Medida da diagonal"

$a = m\ (\overline{CB})$; $b = m\ (\overline{AC}) = 1m$ e $c = m\ (\overline{AB}) = 1m$
$b^2 + c^2 = a^2$
$1^2 + 1^2 = a^2$
$2 = a^2$
$\sqrt{2} = a$ ou $a = 1{,}41m$

3

"Justificando o uso de ripa na diagonal"
• *Alternativa c.*

4

"As medidas dos ângulos"

• *Se um triângulo tem todos os seus ângulos iguais, então cada um medirá 60º, pois podemos fazer 180°: 3 = 60°.*

5

"Os argumentos corretos"
• *Alternativas b e c.*

6

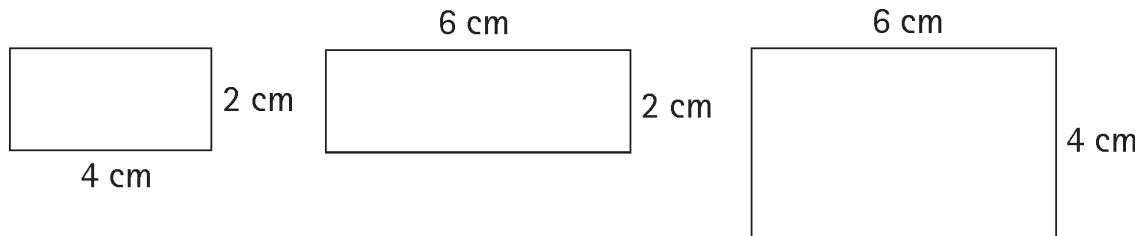
"Verdadeiro ou Falso?"

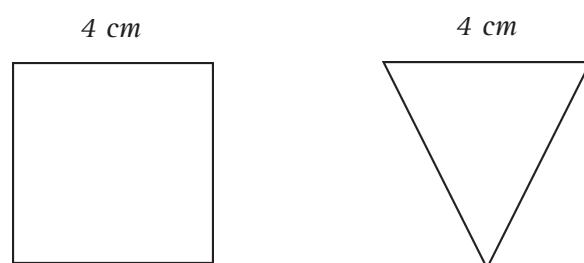
• *a) F b) V c) F d) V e) F*

7

"A medida do ângulo indicado"
• *270º.*

8

"Essa caixa é uma figura plana, ou não plana?"
• *É uma figura não plana.*

9 *"Três tarefas para você"*

1) Entre as semelhanças, podemos destacar:
- *as duas caixas têm 6 faces;*
- *todas as faces, nas duas caixas, são poligonais, com quatro lados;*
- *todas as faces têm todos os seus ângulos internos medindo 90º.*
- *nas duas caixas, as faces são paralelas, duas a duas.*

Como diferença, podemos destacar que, no cubo, as faces são regulares (têm lados com a mesma medida e ângulos iguais) e, na caixa de sapatos, as faces têm lados com medidas diferentes.

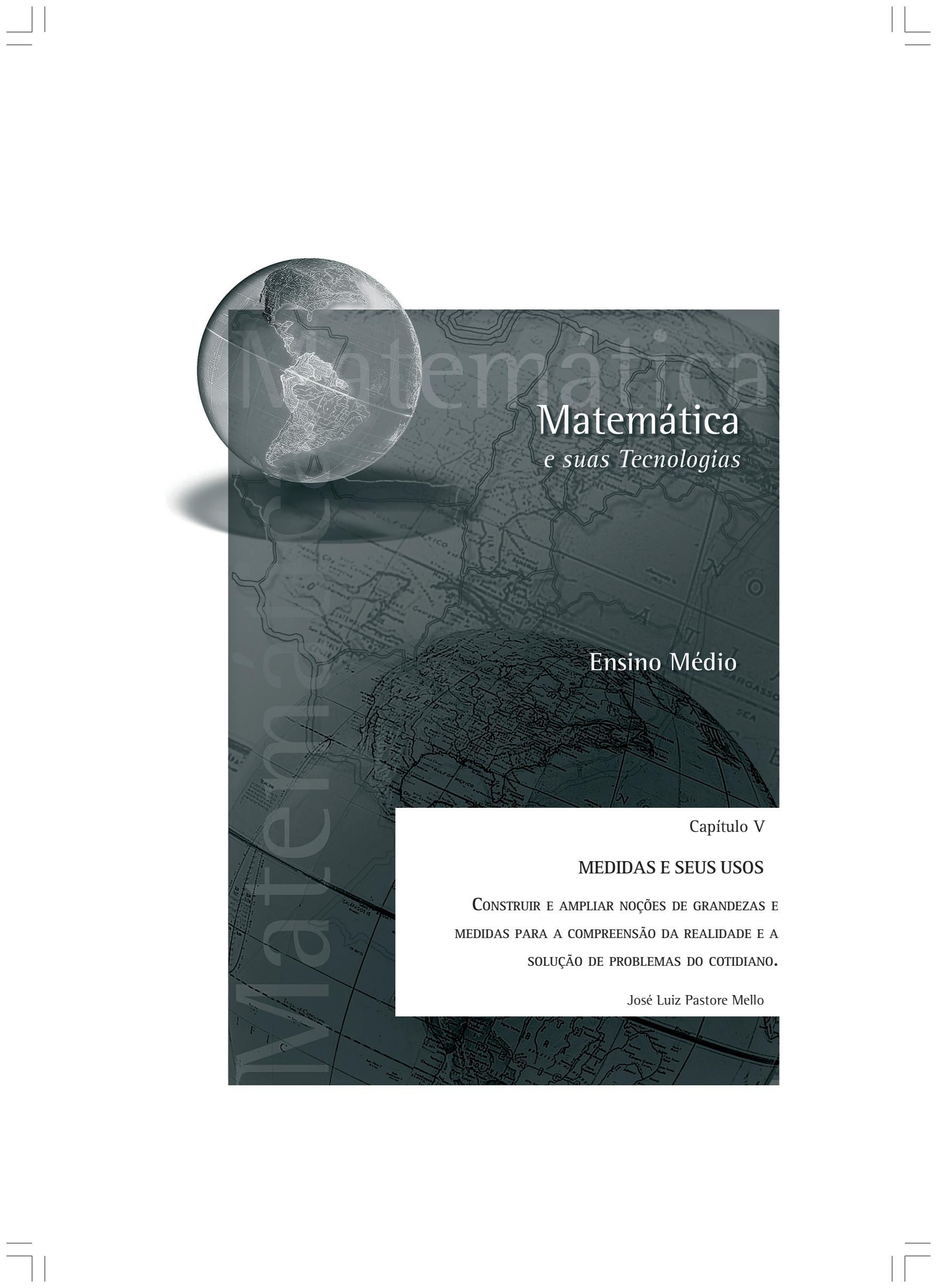
2) Para cada bico, deveremos recortar três figuras retangulares, não regulares, mas cujas medidas dos lados permitam unir as faces.

10 *3) Por exemplo, para cada "bico":*

"Agora, responda e faça"

a) A pirâmide egípcia tem base quadrada. Então, para montar uma caixa com esta forma, serão necessários um quadrado e quatro triângulos iguais, com a base de mesmo comprimento do lado do quadrado.

11 *"Como poderia completar a frase"*

- *cilindro não é um poliedro porque não possui faces poligonais.*

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar e interpretar fenômenos de qualquer natureza expressos em linguagem geométrica.
- Construir e identificar conceitos geométricos no contexto da atividade cotidiana.
- Interpretar informações e aplicar estratégias geométricas na solução de problemas do cotidiano.
- Utilizar conceitos geométricos na solução de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Recorrer a conceitos geométricos para avaliar propostas de intervenção sobre problemas do cotidiano.

Capítulo V

MEDIDAS E SEUS USOS

CONSTRUIR E AMPLIAR NOÇÕES DE GRANDEZAS E MEDIDAS PARA A COMPREENSÃO DA REALIDADE E A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO COTIDIANO.

José Luiz Pastore Mello

Capítulo V

Medidas e seus usos

Apresentação

Contar e medir são duas das operações que realizamos com maior freqüência no dia-a-dia. A dona de casa, ao preparar uma refeição, utiliza determinado padrão de medida para cada ingrediente do prato que está fazendo; um operário, ao ajustar um instrumento de precisão, utiliza determinado padrão de medida em seu ofício; um agricultor, ao calcular a quantidade de sementes que irá utilizar em determinada área de terra, também está realizando uma operação de medição.

Se em nosso cotidiano realizamos várias operações de medição, nada mais adequado do que refletirmos sobre a seguinte pergunta: o que é medir?

Medir significa comparar duas grandezas de mesma espécie, como, por exemplo, dois comprimentos, duas massas, dois volumes, duas áreas, duas temperaturas, dois ângulos, dois intervalos de tempo etc.

As unidades de medidas utilizadas para se estabelecer um padrão de comparação foram até certa época definidas arbitrariamente. Até o final do século XVIII, todos os sistemas de medidas existentes eram baseados nos costumes e nas tradições. Algumas partes do corpo humano – a palma da mão, o polegar, o braço ou a passada – e alguns utensílios de uso cotidiano, tais como cuias e vasilhas, foram os primeiros **padrões** de comparação usados para medir. Com o tempo, cada civilização definiu padrões diferentes e fixou suas próprias unidades de medidas.

Os primeiros sistemas de medidas

As diferentes civilizações começam a padronizar as unidades de medidas já na Antigüidade. Antes disso, as medições não eram muito precisas. O cúbito (ou côvado) egípcio, por exemplo, é uma medida de comprimento cujo padrão é a distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio, estando o braço e o antebraço dobrados em ângulo reto e a mão esticada.
A milha é a distância percorrida por mil passos duplos (1609 metros).
Com esse tipo de unidade, as medições podem dar resultados tão variados quantas são as diferenças individuais do corpo humano. A padronização era feita pela definição de unidades médias, fixadas através de padrões materiais construídos em pedra, argila ou ligas metálicas.

Vejamos uma situação prática onde o problema da escolha de um padrão fixo de medida se torna importante.

Resolvendo problemas

1) João e Paulo precisavam medir a largura de uma rua, mas não dispunham de uma fita métrica. Na tentativa de resolver o problema, ambos caminharam pela rua contando o número de passos. João contou um total de 18 passos e Paulo um total de 16 passos. Como não conseguiram chegar a um acordo sobre o comprimento da rua, foram para casa e mediram com a fita métrica o comprimento das suas passadas. Sabendo que a

passada de João media aproximadamente 80 cm, determine o comprimento da rua.

Resolução:

Você deve ter observado que João e Paulo encontraram números de passadas diferentes ao estimar o comprimento da rua porque suas passadas não são iguais. Se a passada de João mede aproximadamente 80 cm, podemos dizer então que o comprimento da rua é igual ao número de passadas de João multiplicado pelo comprimento da sua passada:

Comprimento da rua = 16 . 80 = 1440 cm
(ou 14,4 m).

Tendo calculado o comprimento da rua em metros, utilizando a largura da passada de João como referência de medida, seria possível agora estimarmos o comprimento da passada de Paulo?

a) Releia o problema coletando todos os dados disponíveis e estime o comprimento da passada de Paulo. (Resposta ao final da página)

Desenvolvendo competências

1

Catarina e seu filho Pedro mediram o comprimento de um palmo de suas mãos obtendo 20cm e 15cm, respectivamente. Se Catarina mediu uma mesa obtendo 10 palmos da sua mão, usando a mão de Pedro para medir a mesa serão necessários:

a) pouco menos de 13 palmos.

b) pouco mais de 13 palmos.

c) exatamente 13 palmos.

d) exatamente 15 palmos.

a) Sabendo que Paulo media a rua em 16 passadas, e que o comprimento da rua estimado pelas passadas de João é de 14,4 m, para determinar o comprimento da passada de Paulo, basta dividir o comprimento da rua pelo número de passadas:

Comprimento da passada de Paulo = $\frac{14,4}{16} = 0,9$ m (ou 90 cm)

A busca da precisão nos padrões de medida

A necessidade de medidas cada vez mais precisas surge a partir do Renascimento, com as grandes navegações e o desenvolvimento da ciência experimental. Para os cientistas da era moderna, conhecer um fenômeno significa compreendê-lo e poder medi-lo. Nos séculos XVII e XVIII, multiplicam-se os instrumentos de precisão, como termômetros, relógios e lunetas. Com a revolução industrial e o desenvolvimento do capitalismo, o comércio internacional também se intensifica e exige sistemas de medidas que garantam não apenas precisão, mas também padrões reconhecidos por todos os países.

Para unificar e padronizar os diversos sistemas em uso nas diferentes áreas da ciência, a Conferência Internacional de Pesos e Medidas em 1960 sugere um Sistema Internacional de Unidades (SI). As principais unidades de medida desse sistema estão na Tabela 1:

Grandeza	*Unidade de medida*	*Sigla da unidade de medida*
Comprimento	Metro	m
Superfície (área)	Metro quadrado	m^2
Volume	Metro cúbico	m^3
Ângulos	Radianos	rad
Massa	Quilograma	kg
Tempo	Segundo	s
Corrente Elétrica	Ampère	A
Temperatura	Kelvin	K

Tabela 1

Quando dizemos que a largura de uma sala é igual a 6 m, queremos dizer que na largura da sala cabem 6 unidades iguais a 1 metro, que é o nosso padrão de medida no Sistema Internacional (SI).

Poderíamos nos perguntar agora qual o significado da unidade m^2 ?

Um m^2 equivale a um **quadrado** de comprimento e largura iguais a 1 metro. Dessa forma, definimos então que todo quadrado de 1 m de largura por 1 m de comprimento tem área de 1 m^2, que será nosso padrão de comparação para a grandeza superfície. Se dissermos então que a sala da nossa casa tem área igual a $20m^2$, isso quer dizer que na superfície da sala cabem 20 quadrados de 1 m por 1 m.

O mesmo raciocínio segue para m^3 que, por definição, é o volume de um **cubo** de 1 m de largura, por 1 m de comprimento e 1 m de altura. Ao dizermos, por exemplo, que o volume da nossa caixa d'água é de 2 m^3, estamos dizendo que na caixa cabem duas unidades de volume conforme definimos.

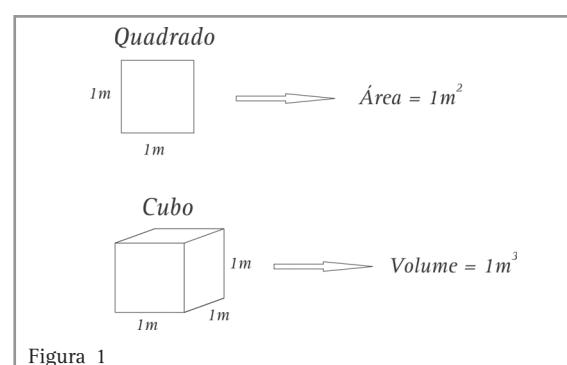



Figura 1

As unidades do Sistema Internacional de Medidas nem sempre são as mais usadas no nosso cotidiano. Vejamos uma atividade de conversão de unidades de um sistema para outro.

Resolvendo problemas

2) Consultando uma tabela sobre diversas temperaturas medidas na escala **Kelvin** (unidade de medida do SI abreviada por K), encontramos que a chama de um fogão tem temperatura média de 1.100 K. Esse número não nos diz muito, porque estamos mais acostumados a medir temperaturas na escala **Celsius.** Sabendo que a escala da temperatura Tc na escala Celsius está relacionada à temperatura Tk na escala Kelvin por Tk = Tc + 273, calcule a temperatura média da chama de um fogão em graus Celsius.

Resolução

$$Tk = Tc + 273$$
$$1100 = Tc + 273$$
$$Tc = 827^{o}C$$

b) Você já pensou no calor produzido pela explosão de uma bomba atômica? Sabendo que a temperatura média da chama do fogão é 1.100K e que a temperatura gerada por uma bomba atômica é 300.000K, estabeleça uma comparação entre essas temperaturas usando como padrão a temperatura média da chama do fogão.
(Resposta ao final da página)

Desenvolvendo Competências

2

Brincando em um balanço, Mário nota que são necessários 3 segundos para um movimento completo de ida e volta:

Ida e volta à posição inicial = 3 segundos

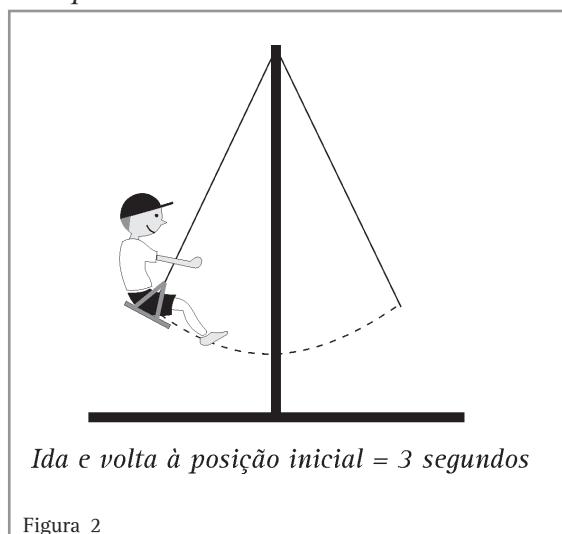



Figura 2

O total de movimentos completos de ida e volta do balanço necessários para que Mário possa brincar 5 minutos no brinquedo é igual a:

a) 150.
b) 120.
c) 100.
d) 80.

b) Dividindo 300.000K por 1.100K, descobrimos que a explosão de uma bomba atômica produz aproximadamente temperatura 273 vezes a temperatura média da chama do fogão.

Os múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida

Quando utilizamos determinado sistema de unidades — como, por exemplo, o SI — para representar certo comprimento, certa massa ou qualquer outra grandeza, podemos nos valer de várias subdivisões decimais da unidade estabelecida. Por exemplo, o Quadro 1 indica alguns submúltiplos e múltiplos da unidade de comprimento metro:

MÚLTIPLOS E SUBMÚTIPLOS DO METRO

$$\frac{1}{1000}\text{ m} = 0{,}001\text{m} = 10^{-3}\text{m} = 1 \text{ milímetro}$$

$$\frac{1}{100}\text{ m} = 0{,}01\text{m} = 10^{-2}\text{m} = 1 \text{ centímetro}$$

$$\frac{1}{10}\text{ m} = 0{,}1\text{m} = 10^{-1}\text{m} = 1 \text{ decímetro}$$

$$1.000\text{ m} = 10^{3}\text{m} = 1 \text{ quilômetro}$$

Quadro 1

A escolha da subdivisão mais adequada para representar determinada medida de comprimento deve sempre levar em consideração o caráter prático da sua utilização. Seria bastante incômodo, por exemplo, se um vendedor de tecidos no varejo tivesse que tomar como padrão de medida o quilômetro, porque sabemos que, na prática, suas vendas individuais de tecidos serão sempre da ordem de alguns centímetros ou poucos metros, no caso de uma venda maior. Da mesma forma, não seria razoável que um motorista utilizasse o milímetro para representar as distâncias rodoviárias que percorre, porque sabemos que elas, em geral, são da ordem de algumas dezenas, centenas ou até milhares de quilômetros.

Estudos específicos envolvendo comprimentos muito pequenos, como, por exemplo, a medição das dimensões de uma célula, ou muito grandes, como, por exemplo, a distância entre corpos celestes, podem utilizar outros múltiplos ou submúltiplos do metro, conforme indica o Quadro 2.

MUITO PEQUENO E MUITO GRANDE

$$\frac{1}{1.000.000}\text{ m} = 0{,}000001\text{ m} = 10^{-6}\text{m} = 1 \text{ micrometro}$$

$$9.500.000.000.000.000\text{ m} = 9{,}5 . 10^{15}\text{m} \approx 1 \text{ ano luz}$$

Quadro 2

Para medir a distância entre corpos celestes, normalmente os astrônomos não utilizam como unidade o metro ou o quilômetro. Você sabe por quê?

Como a distância entre os astros é muito grande, não seria conveniente representá-la com uma unidade de medida muito pequena. Por exemplo, se quiséssemos medir a distância entre a Terra e o Sol em metros, teríamos que indicá-la como 150.000.000.000 m.

A unidade normalmente usada para distâncias muito grandes é o ano-luz, cuja representação em metros está indicada na última linha do Quadro 2. Vamos compreender melhor a conversão entre metro e ano-luz por meio do seguinte problema.

Resolvendo problemas

3) Um ano-luz representa a distância percorrida pela luz em um ano. Sabendo que a velocidade da luz é aproximadamente igual a 300.000 km/s , determine a distância de 1 ano-luz em metros.

Resolução:

Observe que estamos querendo neste problema uma dedução da conversão entre unidades apresentada na segunda linha da Tabela 3.

Dizer que a velocidade da luz é 300.000 km/s é equivalente a dizer que a luz percorre 300.000 quilômetros em um intervalo de tempo igual a 1 segundo. Para saber quanto a luz percorre em um ano, precisamos inicialmente converter 1 ano em segundos e, depois, 300.000 km em metros:

1º) 1 ano em segundos:

1 ano = 365 dias = 365 . 24 horas =

= 365 . 24 . 60 minutos =

$$= \underbrace{365 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60 \text{ segundos}}_{31.536.000 \text{ segundos}}$$

2º) 300.000 km em metros:

1 km —— 1000 metros

300.000 km —— x

x .1 = 300.000 x 1000

x = 300.000.000 m

(usando potência de dez, $x=3.10^8$ m)

Concluímos então que a velocidade da luz de 300.000 km/s é equivalente a 3.10^8 metros por 1 segundo. Para calcular quanto a luz percorre, em metros, no período de 1 ano (31.536.000 segundos) faremos:

3.10^8 m —— 1 s

x —— 31.536.000 s

$x \,.\, 1 = 3 \,.\, 10^8 \times 31.536.000$

$x = 94.608.000 \times 10^8$ m

(aproximadamente $9{,}5 \,.\, 10^{15}$ m)

Observe, com esse resultado, que verificamos exatamente o que está indicado na segunda linha do Quadro 2.

Compreendendo adequadamente as subdivisões de uma unidade de medida podemos resolver uma série de problemas práticos do nosso cotidiano. Um deles pode ser o de estimarmos a quantidade de parafusos contida em um pacote.

4) Um pacote de parafusos pesa aproximadamente 5,4 kg. Sabendo que cada parafuso pesa aproximadamente 15g, calcule quantos parafusos contém o pacote.

Resolução:

Para resolver esse problema, vamos inicialmente converter a massa do pacote de parafusos para gramas. Se 1kg equivale a 1.000g , para determinar a massa de um pacote de 5,4kg em gramas, basta multiplicarmos 5,4 por 1.000.

Dividindo a massa do pacote (540g) pela massa de cada parafuso (15g), concluiremos que cada pacote possui 36 parafusos.

Você já parou para pensar que também nosso sistema monetário possui uma unidade (R$) com múltiplos e submúltiplos? Admitindo 1 real como unidade, uma moeda de 1 centavo equivale a $\frac{1}{100}$ da unidade , assim como uma nota de R$ 10,00 equivale a 10 vezes a unidade.

5) Maria decidiu guardar em um cofrinho todas as moedas de 1, 5 e 10 centavos que tivesse. Ao final de um ano, Maria abriu o cofrinho e encontrou 120 moedas de 1 centavo, 192 moedas de 5 centavos e 85 moedas de 10 centavos. Qual o total de dinheiro que Maria poupou nesse ano?

Resolução:

Quais são os submúltiplos da nossa unidade monetária, o real? Veja que 1 real é igual a 100 centavos e, portanto, 100 moedas de 1 centavo equivalem a R$1,00. Por outro lado, são necessárias 20 moedas de 5 centavos para totalizar R$1,00 e 10 moedas de 10 centavos para totalizar R$1,00.

Faremos o cálculo do total de dinheiro poupado através de regra das proporções:

100 moedas de 1 centavo ______ R$1,00
120 moedas de 1 centavo ______ x

$$100 \cdot x = 120 \cdot 1$$
$$x = \frac{120}{100}$$
$$x = R\$\,1{,}20$$

20 moedas de 5 centavos ______ R$1,00
192 moedas de 5 centavos ______ y

$$20 \cdot y = 192 \cdot 1$$
$$y = \frac{192}{20}$$
$$y = R\$\,9{,}60$$

c) Chame de z o total de reais obtido com 85 moedas de 10 centavos e calcule o total de dinheiro poupado (x + y + z).

Em muitas situações, precisamos compreender um sistema de medidas, seus múltiplos e submúltiplos para resolver um problema geométrico de cálculo de comprimento, área ou volume, como o que analisaremos a seguir. (Resposta ao final da página)

6) Suponha que você tenha uma horta retangular que mede 6,5 m por 8,5 m e deverá receber uma camada de 10 cm de espessura de adubo. A cooperativa local vende o adubo em dm^3 (decímetros cúbicos). Como podemos determinar a quantidade de adubo que deverá ser adquirido para a realização do trabalho?

Resolução:

A quantidade de adubo necessária para o serviço será dada pelo volume do paralelepípedo reto retângulo representado na Figura 3:

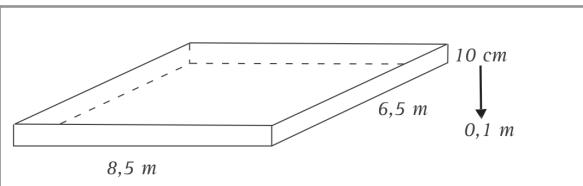



Figura 3

O volume V de um paralelepípedo é igual "a área da base A_b multiplicada pela altura h , ou seja: $V = A_b \,.\, h$.

Como a base do paralelepípedo é um retângulo, A_b é a área de um retângulo, que é igual ao produto do comprimento pela largura.

c) 10 moedas de 10 centavos ______ R$ 1,00
85 moedas de 10 centavos ______ z

$$10 \,.\, z = 85 \,.\, 1$$
$$z = \frac{85}{10}$$
$$z = R\$\ 8{,}50$$

O total poupado será igual a x + y + z, ou seja, R$ 19,30.

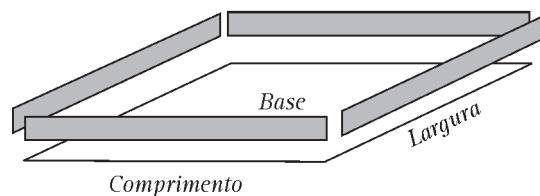



Figura 4

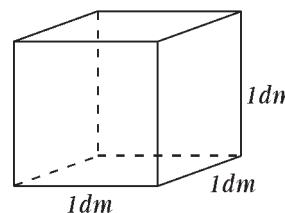
Cálculo da área da base

A_b = área de um retângulo

$A_b = 8,5 \cdot 6,5$

$A_b = 55,25\ m^2$

Cálculo do volume

$V = A_b \cdot h$

$V = 55,25 \cdot 0,1$

$V = 5,525\ m^3$

Como o adubo é vendido em dm^3, precisamos converter $5,525\ m^3$ na unidade requerida. Você já refletiu sobre o que significa $1\ dm^3$?

Por definição, $1\ dm^3$ será o volume de um cubo que tem comprimento, altura e largura igual a 1 dm (veja Figura 5).

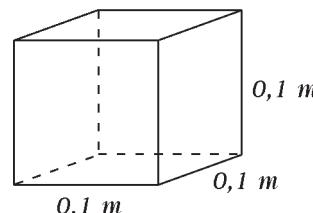
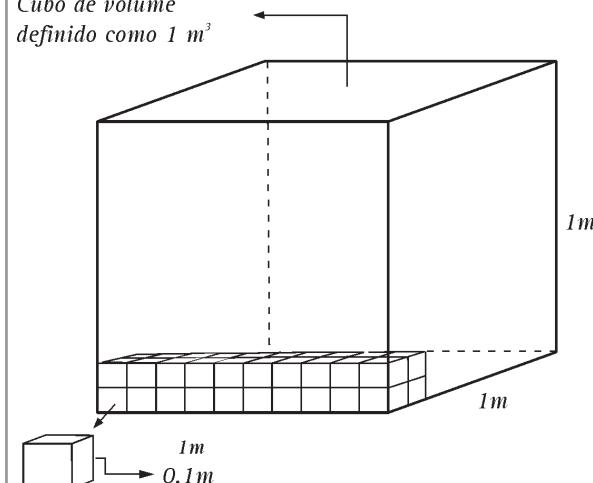



Figura 5

Quantos cubos de $1\ dm^3$ cabem em um cubo de $1\ m^3$? Essa pergunta pode ser melhor compreendida através da Figura 6:

Figura 6

Observe que em $1m^3$ cabem $1.000dm^3$, ou seja, que em um cubo de lados iguais a 1m cabem 1.000 cubos de lados iguais a 1dm (0,1m).

Fazendo agora uma regra de três simples, podemos obter o que queríamos calcular, ou seja, o total de adubo na unidade dm^3:

$$1dm^3 \ \text{——} \ 10^{-3}m^3$$
$$x \ \text{——} \ 5,525m^3$$

$$x \cdot 10^{-3} = 5,525 \cdot 1$$
$$x = \frac{5,525}{10^{-3}}\ dm^3$$
$$x = 5.525\ dm^3$$

Concluímos, então, que será necessário adquirir $5.525\ dm^3$ de adubo na cooperativa para realizar o serviço de fertilização da horta.

Desenvolvendo competências

3

1. Muitas vezes um olhar atento sobre as informações contidas na embalagem de um produto pode indicar surpresa. Esse é o caso de uma informação contida na embalagem de um conhecido refrigerante de baixo teor calórico. Resolvendo o problema abaixo você compreenderá o erro contido nas informações desse produto.

A Figura 7 mostra a embalagem de uma determinada marca de refrigerante de baixo teor calórico.

Admitindo uma informação do rótulo de que 2 litros do refrigerante contêm 9kcal, o valor calórico de uma porção de 200ml, indicado na embalagem como sendo de 0kcal, deve ser corrigido para:

a) 0,20kcal.

b) 0,45kcal.

c) 0,60kcal.

d) 0,90kcal.

Figura 7

2. Dentre as atividades físicas recomendadas pelos médicos para que tenhamos uma vida saudável, a corrida é uma das mais indicadas.

Resolvendo o problema abaixo você estará trabalhando com um sistema de medida para o cálculo do tempo.

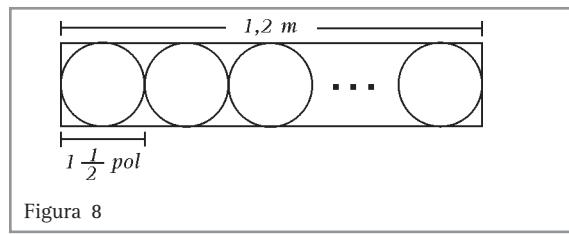
Se um praticante de corrida percorre a distância de 4 quilômetros em 18 minutos, em quanto tempo ele percorreu, em média, cada quilômetro do percurso?

a) 4 minutos e 20 segundos.

b) 4 minutos e 30 segundos.

c) 4 minutos e 40 segundos.

d) 4 minutos e 50 segundos.

Conversão entre sistemas de medida

Se você já teve a oportunidade de observar, viu que a medida de tubos e canos é dada, em geral em polegadas. A unidade de medida polegada faz parte do sistema de unidades inglês, que é diferente do Sistema Internacional (SI).

No sistema inglês, por exemplo, 1 pé = 1/3 jarda e 1 polegada = 1/12 pé (1 jarda do sistema inglês equivale a 0,9144 m do SI).

Resolvendo problemas

Usando a informação de que 1 polegada equivale aproximadamente a 25 mm, vamos resolver o problema abaixo:

7) O sistema de tubulação de um prédio prevê a instalação de tubos de $1\frac{1}{2}$ polegada de diâmetro numa extensão de 1,2 metros, conforme indica a Figura 8:

Figura 8

Determine o total de tubos que deverão ser utilizados nessa instalação.

Resolução:

Você sabe o que significa $1\frac{1}{2}$ polegada ?

A indicação $1\frac{1}{2}$ representa 1 inteiro mais $\frac{1}{2}$.

Usando a notação decimal, 1 + 0,5 , ou seja, 1,5 polegada (uma polegada e meia).

Para resolvermos o problema proposto, em primeiro lugar temos que converter polegadas para metros:

(lembre-se que $1\frac{1}{2}$ é o mesmo que 1,5)

$$1\text{pol} \;\text{———}\; 25\text{mm}$$
$$1,5\text{pol} \;\text{———}\; x$$
$$x \cdot 1 = 1,5 \cdot 25$$
$$x = 37,5\text{mm}$$

Em seguida, como precisamos saber quantos tubos cabem na extensão de 1,2 m , teremos que converter o diâmetro, de cada tubo da Figura 8, de milímetros para metros.

$$0,001\text{m} \;\text{———}\; 1\text{mm}$$
$$x \;\text{———}\; 37,5\text{mm}$$
$$x \cdot 1 = 37,5 \cdot 0,001$$
$$x = 0,0375\text{ m}$$

d) Tente calcular com os dados obtidos o total de tubos necessários para a realização do serviço. (Resposta ao final da página)

Vejamos outro problema:

8) O velocímetro de um veículo importado indica a velocidade em milhas por hora. Sabendo que 1 milha é aproximadamente igual a 1,6km, determine a velocidade que estará indicada no velocímetro quando o veículo estiver a 80km/h.

Resolução:

Se 1 milha é equivalente a 1,6 quilômetros, vamos converter 80 quilômetros em milhas:

$$1\text{ milha} \;\text{———}\; 1,6\text{km}$$
$$x \;\text{———}\; 80\text{km}$$
$$x \cdot 1,6 = 80 \cdot 1$$
$$x = \frac{80}{1,6}\text{ milhas}$$
$$x = 50\text{ milhas}$$

Como a velocidade do veículo é de 80km/h , o velocímetro indicará 50 milhas/h.

d) Basta agora dividir 1,2 m por 0,0375m para descobrir que serão usados 32 tubos na instalação.

Desenvolvendo competências

4

1. Sabemos que 1 litro é equivalente a 1.000 cm^3, o que é o mesmo que afirmar que 1.000 litros é equivalente a 1 m^3. Segundo dados da companhia de água de uma cidade, uma torneira pingando pode gastar 1 litro de água a cada 6 minutos. Levando-se em consideração esses dados, a torneira irá gastar 1 m^3 de água em:

a) 80 horas.

b) 100 horas.

c) 120 horas.

d) 150 horas.

A tabela abaixo indica as operações de compra e venda de dólar americano (US$) feitas por uma casa de câmbio em moeda brasileira (reais) e moeda argentina (pesos):

Compramos 1 US$ por	*Vendemos 1 US$ por*
2,8 pesos	*3,0 pesos*
2,2 reais	*2,5 reais*

2. Utilizando os serviços da casa de câmbio expressos na tabela, um cliente que deseja trocar R$ 100,00 por pesos argentinos irá obter:

a) 112 pesos.

b) 108 pesos.

c) 92 pesos.

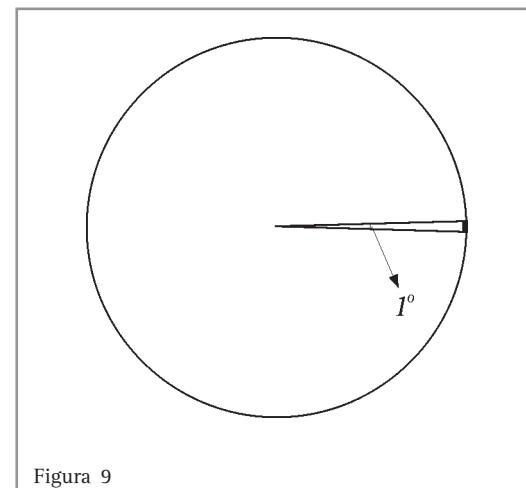
d) 88 pesos.

Medida de ângulos e arcos

A unidade de medida de ângulos com a qual estamos mais familiarizados é o grau.

O grau representa a fração $\frac{1}{360}$ de um círculo, conforme indica a Figura 9:

Figura 9

Nos cálculos científicos, uma medida mais útil de ângulo é o radiano (rad), por isso ele faz parte do SI. Vamos compreender agora o significado dessa unidade.

Resolvendo problemas

9) Imaginemos um arco de 6 cm em uma circunferência de raio igual a 3 cm, como mostra a Figura 10. Assumindo o raio como unidade, quantos raios cabem no comprimento desta circunferência?

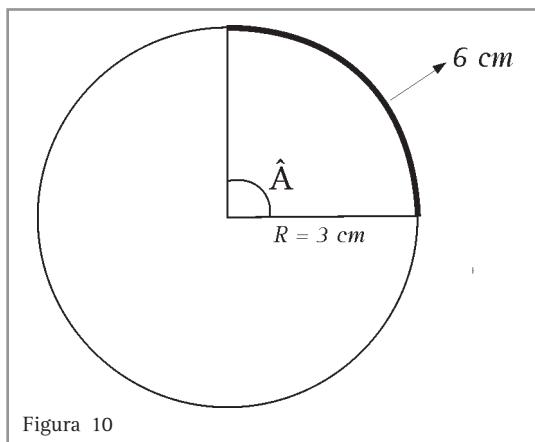



Figura 10

Resolução:

Para respondermos a esta pergunta, basta dividirmos 6 cm por 3 cm. Segue que neste arco cabem 2 raios. Podemos dizer que o ângulo Â mede 2 radianos (abrevia-se 2 rad). Em geral, uma fórmula bastante simples que nos ajuda a encontrar um ângulo Â em radianos, a partir de um arco de comprimento igual a **C** em um círculo de raio R, é:

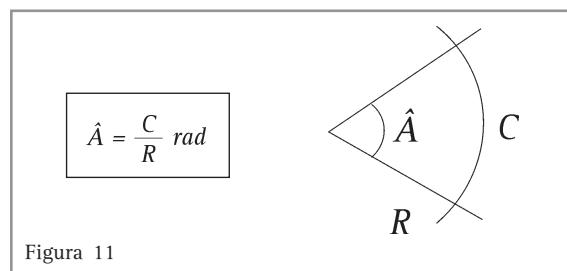



Figura 11

Para convertermos um ângulo de radianos para graus e vice versa, procedemos da seguinte maneira. Sabendo que o comprimento C de uma circunferência de raio R é dado por C = 2πR, e que uma circunferência tem 360°, podemos dizer que 2πR (ou 2π rad) equivalem a 360°. De forma prática, temos então que:

$$\pi \text{ rad equivale a } 180^\circ$$

Medidas de ângulos e arcos

A utilização adequada da medida de um ângulo pode nos auxiliar na resolução de muitos problemas. Vamos estudar uma medida importante em um triângulo que nos permitirá resolver alguns problemas práticos: *o seno de um ângulo.*

Em um triângulo retângulo definimos o seno de um dos ângulos internos agudos (ângulos menores que 90°) como sendo o quociente entre a medida do cateto oposto ao ângulo, pela medida da hipotenusa do triângulo. Observe na Figura 12 a definição de seno de um ângulo:

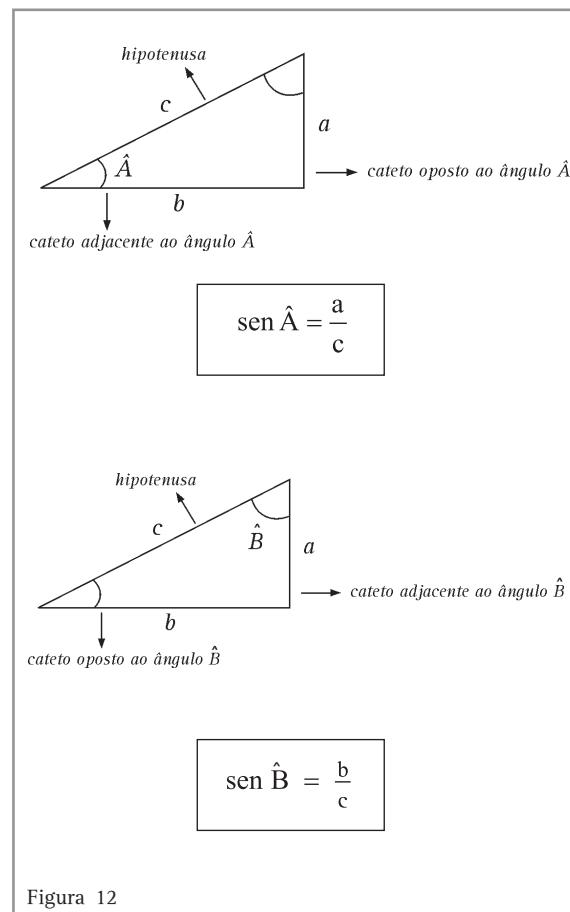
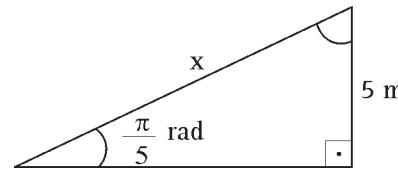



Figura 12

Atualmente podemos utilizar tabelas ou calculadoras científicas para encontrarmos a medida do seno de um ângulo qualquer. Vamos discutir agora para que nos serviria na prática o valor do seno de um determinado ângulo.

O problema que desenvolveremos a seguir nos permitirá trabalhar com a conversão entre unidades de medidas de ângulos e responder à pergunta sobre qual a importância do seno de um ângulo na resolução de um problema com triângulos.

Resolvendo problemas

10) Um pedreiro precisa construir uma rampa que atinja uma altura de 5 m em relação ao solo, e ela deve ter elevação de 36°. Para determinar o comprimento da rampa, o pedreiro possui apenas uma calculadora que determina o seno de ângulos; contudo esses ângulos devem estar em unidade do SI (radianos). Determine qual deverá ser o ângulo da rampa em radianos e, em seguida, calcule a altura da rampa, admitindo como conhecido o seno do ângulo encontrado.

Resolução:

Inicialmente vamos converter o ângulo de 36° em radianos para podermos utilizar a calculadora posteriormente. Já vimos anteriormente que π radianos equivalem a 180° . Para converter 36° em radianos, basta estabelecer uma regra de três simples:

$$\pi \text{ rad} \text{ ——— } 180°$$
$$x \text{ ——— } 36°$$

$$x \cdot 180° = 36° \cdot \pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{36° \cdot \pi \text{ rad}}{180°}$$

$$x = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

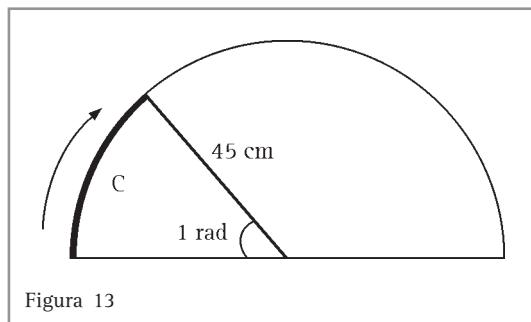
Agora convertendo o ângulo de 36° para radianos, temos a seguinte situação:

Sendo $\text{sen } \hat{A} = \dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$

Então $\text{sen } \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{5}{x}$

Como o valor de $\text{sen } \dfrac{\pi}{5}$ é aproximadamente igual a 0,588, podemos calcular o comprimento da rampa x da seguinte forma:

$$0{,}588 = \frac{5}{x}$$
$$x \cdot 0{,}588 = 5$$
$$x = \frac{5}{0{,}588}$$
$$x \approx 8{,}5\ m$$

É bom observar que nos interessa desenvolver nessa atividade apenas a habilidade de conversão de um ângulo, de grau para radiano. Sempre que preciso, podemos consultar tabelas ou calculadoras para obtermos o seno de um ângulo, mas devemos estar atentos à unidade de medida que está sendo usada para ângulo.

Resolvendo problemas

Vejamos agora um problema no qual poderemos explorar novamente a idéia da medida de um ângulo em radianos.

11) A ponta de um limpador de pára-brisa de 45 cm de comprimento percorreu um arco de 1 radiano. Calcule a distância percorrida pela ponta do limpador e, em seguida, calcule um valor aproximado em graus para o ângulo percorrido pela ponta do limpador.

Resolução:

Figura 13

Como discutimos anteriormente, um ângulo Â em radianos pode ser obtido por $\hat{A} = \frac{C}{R}$, onde **C** é o comprimento do arco e R o raio do círculo.

Como temos o ângulo Â em radianos e o raio R do círculo (comprimento do limpador) , iremos calcular a distância percorrida pela ponta do limpador, representada por C:

$$1 = \frac{C}{45}$$
$$C = 45 \text{ cm}$$

Em seguida, vamos converter 1 radiano em graus:

$$\pi \text{ rad} ____ 180^{\circ}$$
$$1 \text{ rad} ____ x$$
$$x \cdot \pi = 1 \cdot 180^{\circ}$$
$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$
$$\text{Usando } \pi \approx 3{,}14$$
$$x \approx 57{,}3^{\circ}$$

Concluímos então que a ponta do limpador percorreu 45 cm, e que o ângulo descrito nesse percurso foi de aproximadamente 57°.

Desenvolvendo competências

5 *Um ângulo de 30º medido com transferidor corresponde a um ângulo de*

a) $\frac{\pi}{2}$ *rad*

b) $\frac{\pi}{3}$ *rad*

c) $\frac{\pi}{4}$ *rad*

d) $\frac{\pi}{5}$ *rad*

Escalas, plantas e mapas

Certamente em algum momento você já se deparou com uma planta ou um mapa. São exemplos de plantas e mapas o guia de ruas de uma cidade, a planta de uma casa ou de um terreno, o mapa de um país, o projeto de uma peça industrial em escala etc. Dizemos então que uma planta ou um mapa são reproduções de figuras que buscam algum tipo de semelhança com as figuras originais. Em geral, boa parte dos mapas que manipulamos em nosso dia-dia mantém a seguinte semelhança com a figura original:

- Os ângulos não mudam.
- As medidas de comprimento são multiplicadas (ou divididas) por um certo número. Chamamos esse número de *escala* da planta ou do mapa.

Observe na Figura 14 um exemplo de planta em escala de uma casa:

A escala da planta é de $\frac{1}{100}$ (lê-se 1 para 100), o que significa que cada unidade de comprimento indicada na planta equivale a 100 unidades de comprimento na casa original. Por exemplo, se medirmos na planta com a régua um comprimento de 6,00 cm, ele corresponderá a um comprimento de 600 cm, ou 6 m, na casa. Como você pode notar, a informação da escala pode aparecer em uma planta ou mapa sem referências à unidade de medida; nesse caso precisamos utilizar algum instrumento para medir comprimentos (régua, fita métrica, etc.).

Ao observarmos que a planta da Figura 14 indica uma cozinha de comprimento igual a 5,00, usando a escala dada sabemos portanto que o comprimento real da cozinha é igual a 500. A unidade de medida que corresponderá a 500 é a mesma unidade de medida obtida com uma régua ao medirmos 5,00 na planta (centímetros no caso do nosso exemplo). Segue então, que a cozinha da casa tem 500 cm (ou 5 m) de comprimento.

Figura 14

Em outros casos, a escala indicada na planta ou no mapa informa a equivalência com uma determinada unidade de medida, como segue abaixo:

Esta escala indica que cada distância de 1 cm do mapa representa 100 km em situação real.

Voltando ao exemplo da Figura 14 em que não aparecia a unidade de medida, se mudarmos a escala da planta de $\frac{1}{100}$ para $\frac{1}{200}$, isso implica dizer que cada unidade de comprimento da planta irá equivaler a 200 unidades na casa. Por exemplo, a largura do banheiro, medida na planta com auxílio de uma régua (3,00 cm), irá equivaler a uma largura real de 600 cm, ou 6 m, no banheiro da casa.

O tamanho da escala de um mapa ou de uma planta depende sempre de dois fatores:

- Do tamanho daquilo que estamos querendo representar em escala.
- Do nível de detalhamento de que necessitamos.

Analisemos esta informação por meio dos mapas da Figura 15:

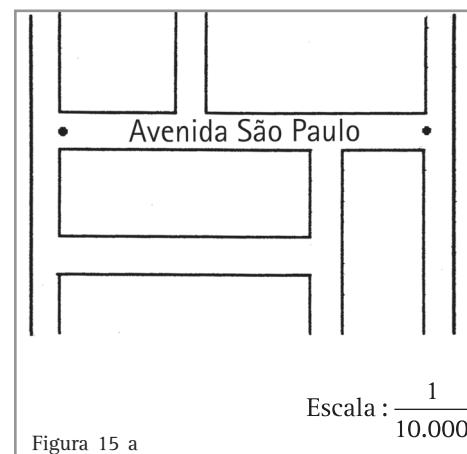



Figura 15 a

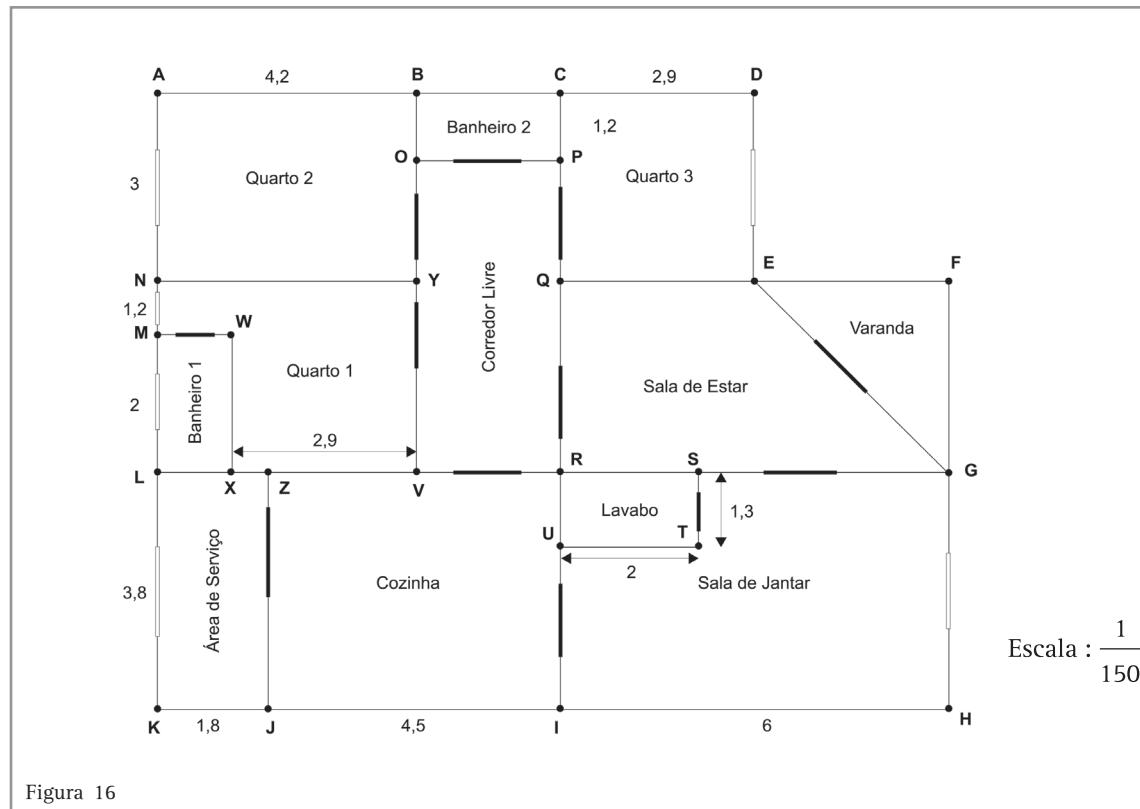
Figura 15 b

Medindo com uma régua o comprimento da Avenida São Paulo no primeiro mapa, encontramos 4,50 cm. Utilizando a escala desse mapa, concluímos então que a Avenida São Paulo tem comprimento igual a 45000 cm, ou 450 m. No caso do mapa do Estado de São Paulo, a distância entre as duas cidades indicadas, medida com uma régua, é igual a 0,5 cm, o que equivale a 9.000.000 cm, ou seja 90 km.

A análise das figuras nos permite concluir que para representar algumas ruas de uma cidade em um mapa com escala de 1 para x, o valor de x deverá ser menor do que seria em uma escala de um mapa de um estado brasileiro.

Plantas em escala

Figura 16

A planta de uma casa térrea, indicada na Figura 16, tem as medidas dadas em centímetros e será utilizada nas demais atividades deste capítulo.

Desenvolvendo competências

6

Utilizando a planta da Figura 16, indicamos o cálculo de algumas dimensões de cômodos da casa e reservamos lacunas para que você pratique interpretação e cálculo com os dados contidos na planta:

Quarto 1

NY = AB = 4,2 e YV = MN + ML = 3,2

Quarto 2

BY = NA = ____ e NY = AB = ____

Quarto 3

QE = CD = ____ e CQ = DE = NA = ____

Banheiro 1

WX = ML = ____ e MW = LX = AB - XV = 4,2 - 2,9 = 1,3

Banheiro 2

BO = CP = 1,2 e BC = OP = KI - AB=_____

Lavabo

RU = ST = ____ e RS = UT = ______

Varanda

EF = IH - CD = ______ e FG = YV = ______

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo EFG, temos que $EG^2 = 3,1^2 + 3,2^2$*, ou seja,*

$EG=\sqrt{19,85} \approx 4,4$

Sala de estar

QR = YV = ____ , QE = CD = ____ , RG = IH = ___ e EG » 4,4

Sala de jantar

SG = IH - UT = 6 - 2 = 4 , GH = LK = ______ e UI = GH - UR = _____

Cozinha

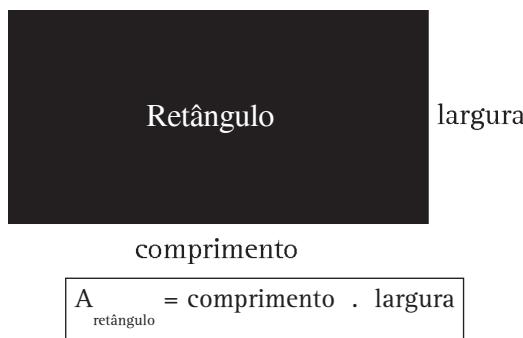
ZR = JI = ____ , ZJ = RI = LK = ____ e ZV = AB - MW = _____

Área de serviço

ZJ = LK = ____ e LZ = KJ = _____

Corredor livre

VR = OP = JI - BC =___ , OY = PQ = NA - BO = 3 - 1,2 = 1,8 e YV = QR = NL = ____

Resolvendo problemas

Ao observarmos a planta da casa (Figura 16), podemos estar interessados em comparar o tamanho de alguns cômodos, ou seja, em comparar a área total desses cômodos. No problema que se segue iremos calcular a área de dois banheiros e de um lavabo para verificarmos qual deles é maior:

12) Comparando o lavabo, o banheiro 1 e o banheiro 2, qual deles é maior?

Resolução:

Indicaremos sempre por A a área do cômodo que estamos querendo calcular.

Revisando o cálculo da área de um retângulo, temos:

$$A_{retângulo} = comprimento \;.\; largura$$

O comprimento do lavabo, que tem a forma de um retângulo, medido na planta é igual a 2 cm e sua largura é de 1,3 cm. Como a escala da planta é de 1 para 150, segue que cada 1 cm da planta equivale a 150 cm de comprimento na casa. Dessa forma, temos então que o comprimento do lavabo é igual a 300 cm (ou 3 m) e sua largura igual a 195 cm (ou 1,95 m). A área do lavabo será igual a:

$$A_{lavabo} = 3 \;.\; 1,95$$

$$A_{lavabo} = 5,85 m^2$$

Utilizando o mesmo raciocínio em relação aos dois banheiros, concluiremos que:

$$A_{banheiro\ 1} = A_{retângulo} = 2 \;.\; 1,3$$

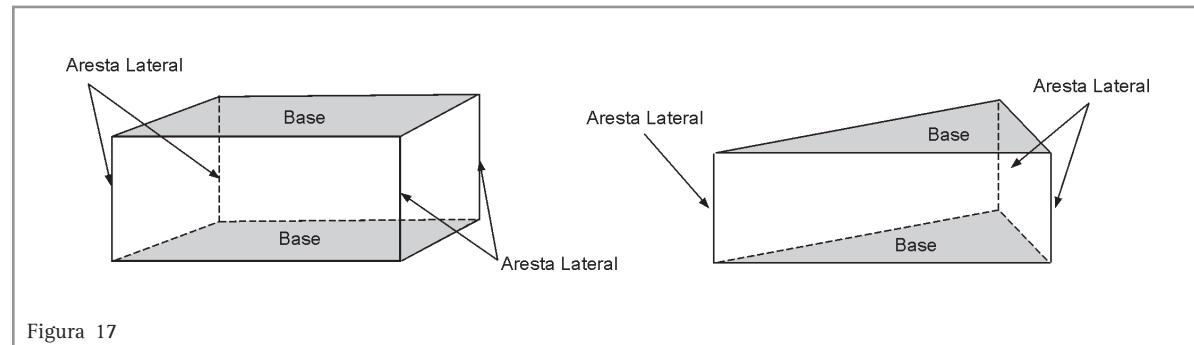
$$A_{banheiro\ 1} = 4,6 \; m^2$$

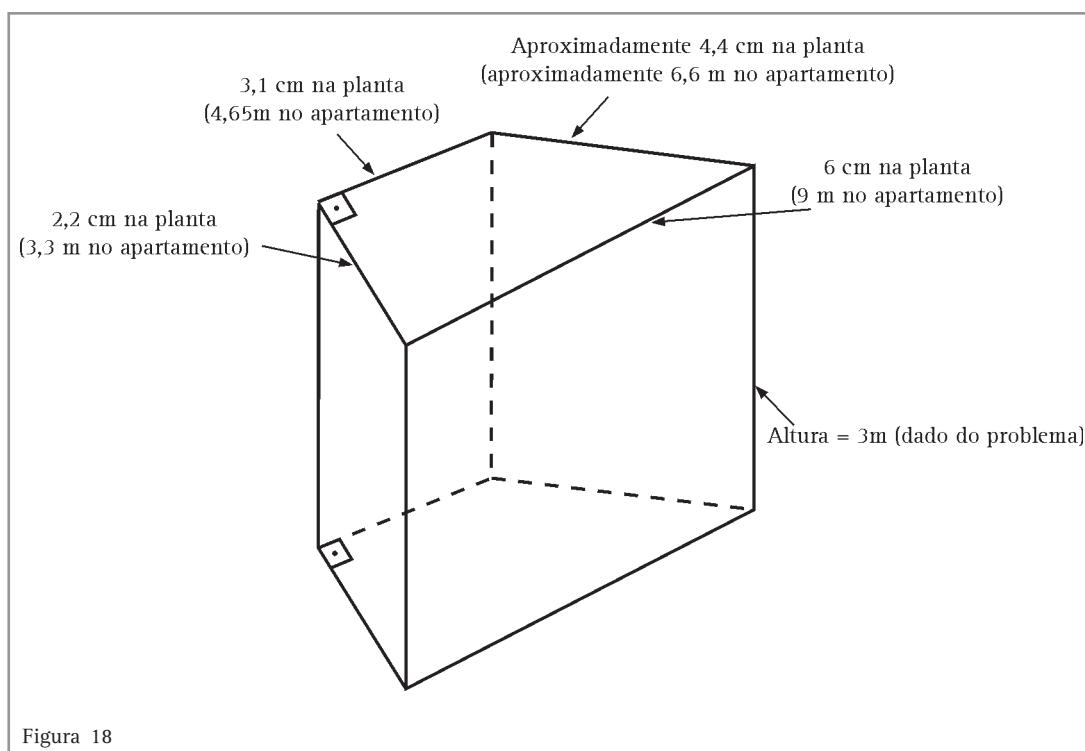
$$A_{banheiro\ 2} = A_{retângulo} = 1,2 \;.\; 2,1$$

$$A_{banheiro\ 2} = 2,52 \; m^2$$

Comparando a área dos três ambientes, verificamos que o lavabo é o maior deles.

Para pintar as paredes de um cômodo da casa, precisamos saber qual a sua área a fim de estimar o total de tinta que utilizaremos. Façamos uma atividade em que nosso objetivo será o de calcular a área total das paredes de um cômodo para em seguida estimar o total de tinta necessário para pintar esse cômodo.

13) Se a altura das paredes da casa mede 3 m, calcule a área total das quatro paredes e do teto da sala de estar.

Resolução:

A sala de estar será um prisma cuja base é um trapézio. Prismas são sólidos geométricos que possuem as seguintes características:

- Bases paralelas iguais.
- Arestas laterais iguais e paralelas ligando as duas bases.

Vejamos alguns exemplos de prismas:

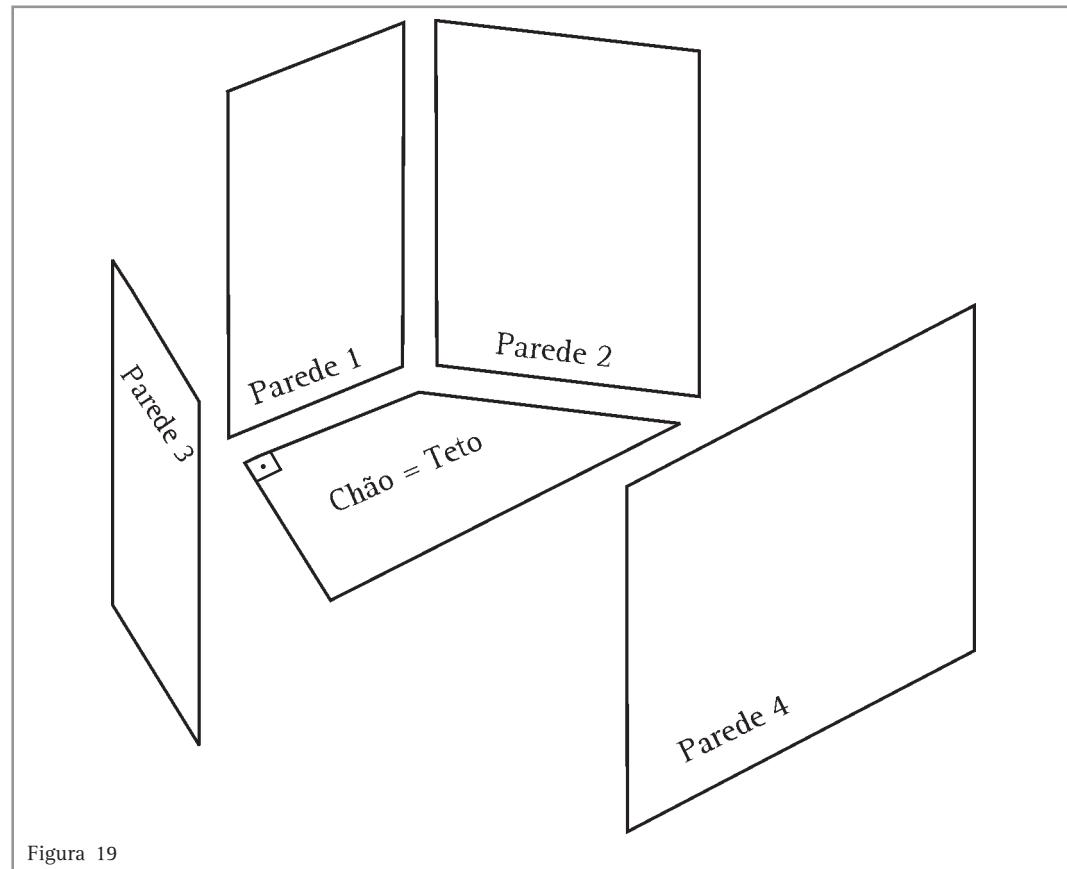



Figura 17

Observemos agora a forma geométrica que representa a sala de estar da casa:

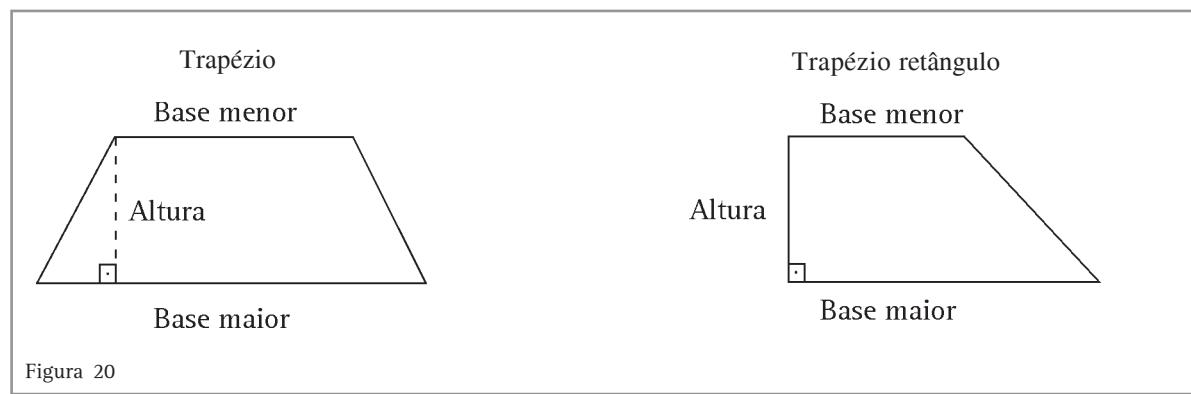



Figura 18

Os cálculos das dimensões da casa, indicados na figura, foram feitos utilizando a escala $\frac{1}{150}$ da planta:

Ex. Cada 1 cm da planta equivale a 150 cm da casa. A parede de 2,2 cm na planta equivale portanto a 2,2 x 150 cm , ou seja, a 330 cm (ou 3,3 m).

Vamos agora calcular a área das paredes e a área do teto:

Figura 19

Observe na figura 19 que as quatro paredes têm a forma de retângulos e que o teto e o chão têm a forma de um trapézio. Recordemos que a área de um trapézio é dada por:

Figura 20

$$A_{Trapézio} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{Altura}}{2}$$

Segue então que:

$$A_{\text{Parede 1}} = 4{,}65 \cdot 3 = 13{,}95m^2$$
$$A_{\text{Parede 2}} = 6{,}6 \cdot 3 = 19{,}8m^2$$
$$A_{\text{Parede 3}} = 3{,}3 \cdot 3 = 9{,}9m^2$$
$$A_{\text{Parede 4}} = 9 \cdot 3 = 27m^2$$
$$A_{\text{Teto}} = \frac{(9 + 4{,}65) \cdot 3 \cdot 3}{2} \approx 22{,}52m^2$$

A área total que queremos calcular será igual a (13,95+19,8+9,9+27+22,52) m^2, ou seja, 93,17 m^2.

14) Se 1 litro de tinta for suficiente para pintar 20 m^2 de parede, quantos litros serão necessários para pintar as paredes e o teto da sala de estar da casa?

Resolução:

Como já calculamos na atividade anterior a área das paredes e do teto, basta agora estabelecer a seguinte proporção:

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ litro} & \text{———} & 20m^2 \\ x & \text{———} & 93{,}17m^2 \end{array}$$
$$x \,.\, 20 = 1 \,.\, 93{,}17$$
$$x = \frac{93{,}17}{20} \text{ litros}$$
$$x \approx 4{,}6 \text{ litros (ou 4 litros e 600ml)}$$

Concluímos então que serão necessários aproximadamente 4 litros e 600 ml de tinta para realizar o serviço.

Resolvendo problemas

15) Como última atividade, vamos agora calcular o total de cerâmica necessário para ladrilhar o chão da varanda da casa.

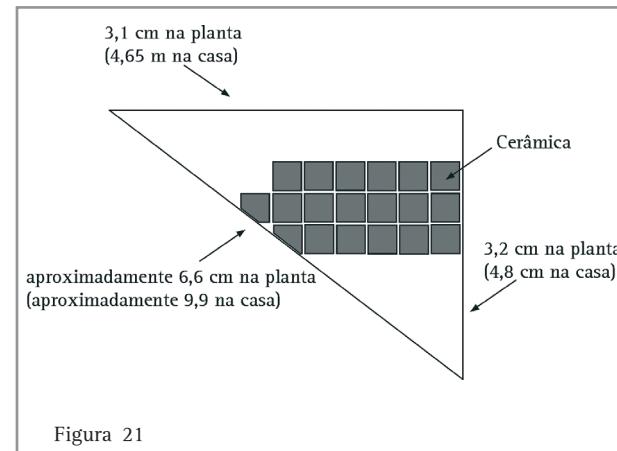



Figura 21

Quantos m^2 de cerâmica são necessários para recobrir o chão da varanda da casa?

Resolução:

O total de cerâmica necessário para recobrir o chão da varanda, em m^2, é igual à área da varanda (observe na planta da casa que o chão da varanda tem a forma de um triângulo retângulo).

Dependendo do formato dos ladrilhos, para que o serviço fique bem feito, precisaremos cortar algumas cerâmicas, se quisermos que o chão fique totalmente preenchido. Assim, haverá uma pequena perda de cerâmica que deverá ser levada em consideração nos cálculos (Figura 21).

Lembremos agora que a área de um triângulo é

dada por:

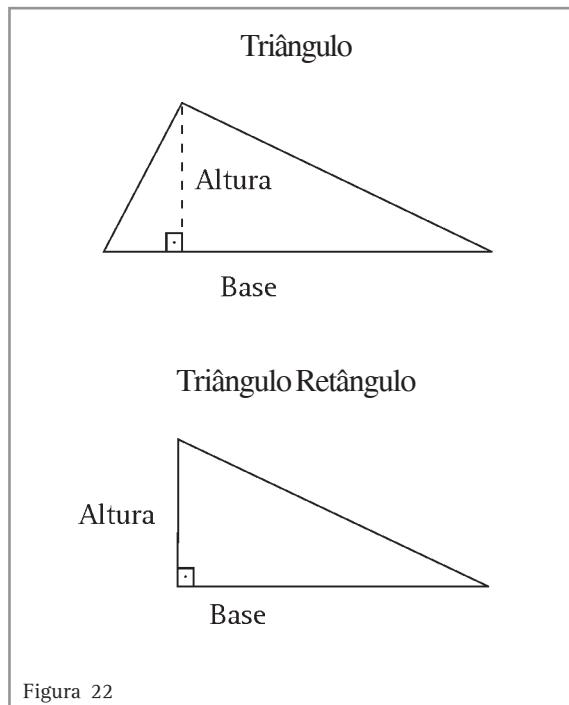



Figura 22

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{Base.Altura}}{2}$$

Segue então que a área da varanda pode ser calculada como:

$$A_{\text{varanda}} = \frac{4{,}65 \cdot 4{,}8}{2}$$

$$A_{\text{varanda}} = 11{,}16m^2$$

Levando-se em consideração as perdas nos cantos, podemos dizer que são necessários aproximadamente 12 m^2 de cerâmica para ladrilhar o chão da varanda.

Conferindo seu conhecimento

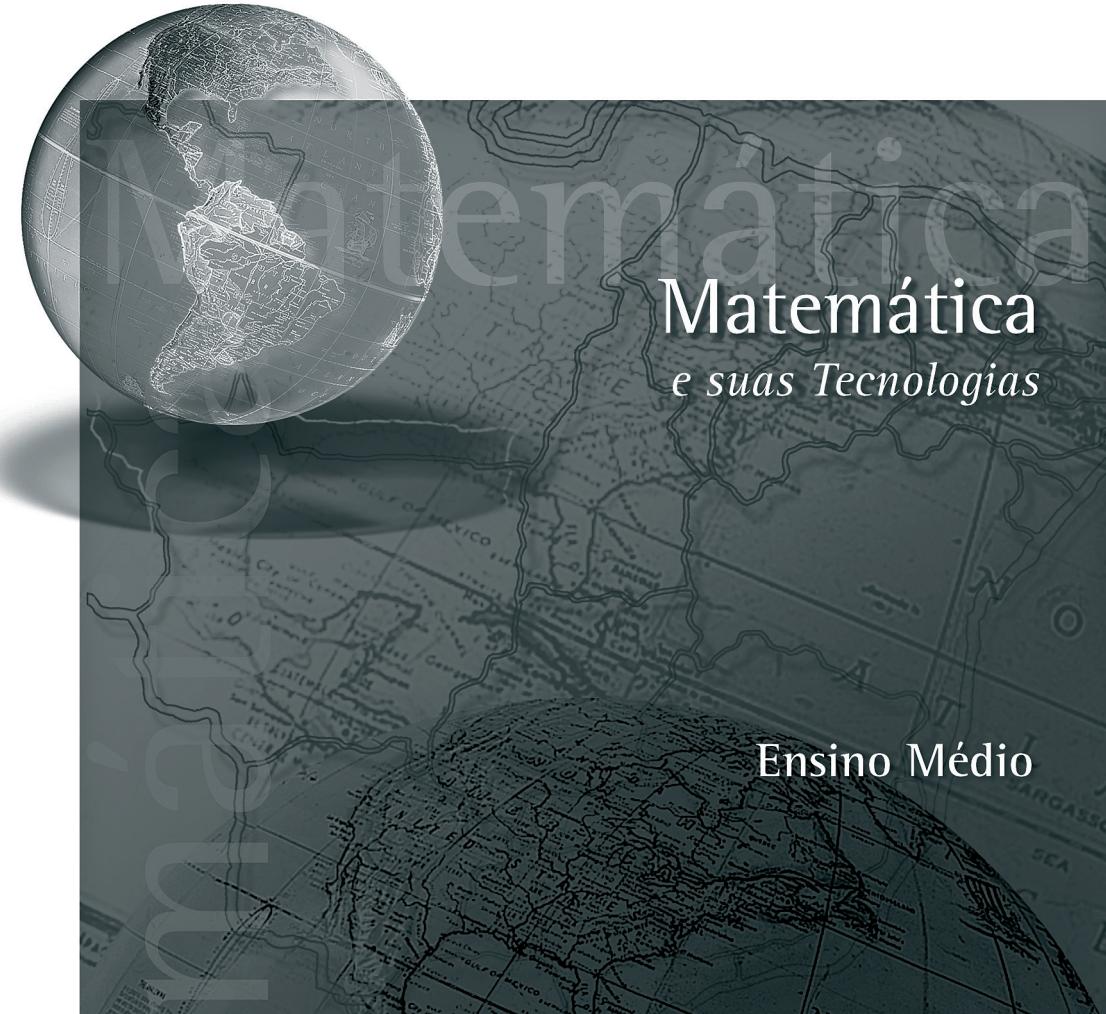
1 *Resposta: (b)*

2 *Resposta: (c)*

3 *Respostas: 1. (d) e 2. (b)*

4 *Rspostas: 1. (b) e 2. (a)*

5 *Resposta: (d)*

6

Cômodo	Dimensões na planta do apartamento			
Quarto 1	NY = AB = 4,2	YV = MN + ML = 3,2		
Quarto 2	BY = NA = 3	NY = AB = 4,2		
Quarto 3	QE = CD = 2,9	CQ = DE = NA = 3		
Banheiro 1	WX = ML = 2	MW = LX = AB - XV = 1,3		
Banheiro 2	BO = CP = 1,2	BC = OP = KI - AB = (1,8 + 4,5) - 4,2 = 2,1		
Lavabo	RU = ST = 1,3	RS = UT = 2		
Varanda	EF = IH - CD = 6 - 2,9 = 3,1	FG = YV = 3,2	EG = $\sqrt{19,85} \approx 4,4$	
Sala de estar	QR=YV=3,2	QE=CD=2,9	RG=IH=6	EG $\approx$ 4,4
Sala de jantar	SG=IH - UT=4	GH=LK=3,8	UI=GH-UR=3,8 - 1,3 = 2,5	
Cozinha	ZR=JI=4,5	ZJ=RI=LK=3,8	ZV=AB - MW = 4,2 - 1,3	
Àrea de serviço	ZJ = LK = 3,8	LZ = KJ = 1,8		
Corredor livre	VR = OP = JI - BC = 4,5 - 2,1=2,4	OY = PQ = NA - BO=1,8	YV=Q=NL=1,2 + 2=3,2	

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar e interpretar registros, utilizando a notação convencional de medidas.
- Estabelecer relações adequadas entre os diversos sistemas de medida e a representação de fenômenos naturais e do cotidiano.
- Selecionar, compatibilizar e operar informações métricas de diferentes sistemas ou unidades de medida na resolução de problemas do cotidiano.
- Selecionar e relacionar informações referentes a estimativas ou outras formas de mensuração de fenômenos de natureza qualquer, com a construção de argumentação que possibilitem sua compreensão.
- Reconhecer propostas adequadas de ação sobre a realidade, utilizando medidas e estimativas.

Capítulo VI

AS GRANDEZAS NO DIA-A-DIA

CONSTRUIR E AMPLIAR NOÇÕES DE VARIAÇÃO DE GRANDEZA PARA A COMPREENSÃO DA REALIDADE E A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO COTIDIANO.

Lúci M. Loreto Rodrigues

Capítulo VI

As grandezas no dia-a-dia

Nossa sociedade se torna cada dia mais complexa: produz e incorpora novas informações a todo instante e faz com que alteremos nosso modo de vida em curtos espaços de tempo. Para nos adaptarmos, precisamos de conhecimentos básicos e essenciais. Devemos compreender linguagens variadas, raciocinar de forma criativa, saber organizar e interpretar as informações recebidas e relacioná-las com outros conhecimentos disponíveis.

Saber analisar situações é fundamental para que possamos reconhecer e criar formas de proteção contra, por exemplo, a propaganda enganosa e os estratagemas de marketing a que somos submetidos como consumidores.

Saber resolver problemas faz com que adquiramos mais confiança em nós e sejamos mais respeitados pelos colegas que nos vêem como alguém que contribui com idéias. A Matemática pode dar uma grande contribuição para isso, à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias e favorece o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar e justificar.

A proposta desse capítulo é abordar as idéias matemáticas sobre **variação de grandezas** através de uma linguagem familiar, relacionada à realidade, ao seu dia-a-dia, colocando-o frente a situações-problema, incentivando-o a pensar, raciocinar, formular hipóteses e buscar soluções, bem como exercitar a leitura.

Neste capítulo resolveremos com você algumas das atividades; entretanto, outras devem ser resolvidas por você, como forma de fixar os conceitos apresentados e testar suas habilidades. Para conferir e acompanhar o seu desempenho, as respostas estarão a seu dispor no final do capítulo. Um bom estudo!

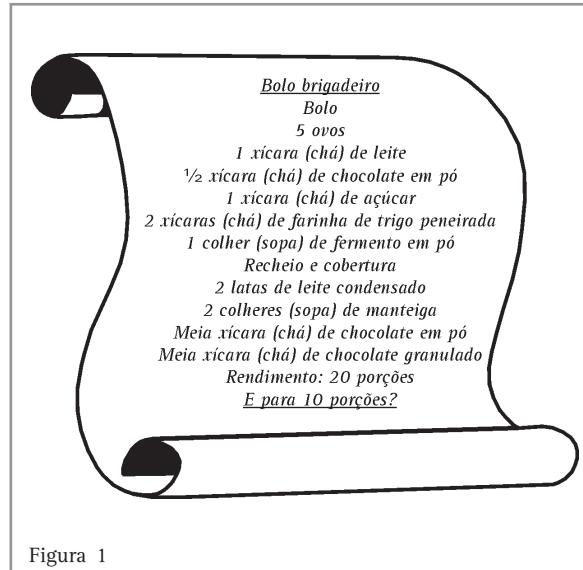



Figura 1

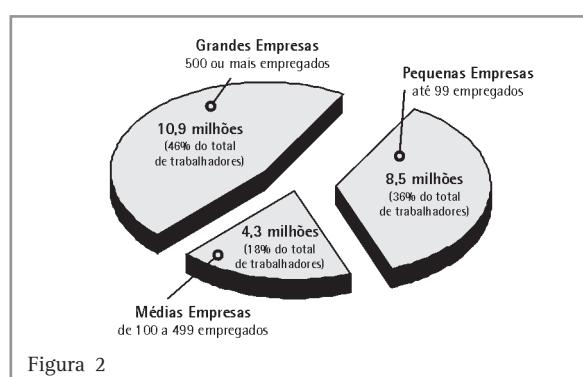



Figura 2

Figura 3

Analisando a variação de algumas grandezas

Em nosso dia-a-dia, é muito comum necessitarmos comparar **grandezas**, como os preços no supermercado, os ingredientes de uma receita, a velocidade média e o tempo. E, quando comparamos, percebemos que existem situações em que, sabendo como uma das grandezas varia, podemos prever a variação da outra com o uso de cálculos matemáticos simples. Informalmente você já conhece e utiliza esses cálculos. Pretendemos aqui aprimorar esses conhecimentos para que você possa aplicá-los com mais confiança e consistência.

Leia, analise cada situação e responda às perguntas abaixo. Depois, então, confira suas respostas:

1) *Com R$ 1,80 posso comprar 10 pãezinhos que custam R$ 0,18 cada. Com base nesses dados é possível calcular quanto gastarei para comprar 27 pãezinhos iguais a esses?*

2) *Um automóvel, deslocando-se a uma velocidade média de 60 km/h, faz um determinado percurso em 4h. É possível prever, fazendo cálculos, em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade média utilizada fosse de 120 km/h?*

3) *Fabiane estava ansiosa porque iria fazer um exame em que uma das provas continha 40 testes para serem resolvidos em 2 horas. Se ela resolveu inicialmente 2 testes em 5 minutos, e depois 5 testes em 10 minutos, é possível prever, fazendo cálculos, em quanto tempo ela vai fazer os demais testes?*

4) *Felipe, que hoje tem 14 anos, mede 1,70 m. É possível prever, fazendo cálculos, sua altura daqui a 10 anos?*

Figura 4

Grandeza

é o que pode ser medido, contado, que pode sofrer aumento ou diminuição, como: tempo, velocidade, comprimento, superfície, volume, massa, capacidade, temperatura, quantidade, custo etc.

Conferindo as respostas

Situação 1: é possível fazer cálculos e chegar ao resultado, pois existe uma relação matemática entre as grandezas envolvidas: **número de pães** e **custo dos pães.** Se dobrarmos o número de pães, dobra o custo. Se dividirmos por 3 o número de pães, o custo também fica dividido por 3. Se multiplicarmos o número de pães por 27, multiplicaremos também o custo por 27.

Situação 2: é possível fazer cálculos e chegar ao resultado, pois existe uma relação matemática entre as grandezas envolvidas: **velocidade média e tempo.** Se dobrarmos a velocidade média, o tempo fica dividido por 2. Se dividirmos por 2 a velocidade média, o tempo fica multiplicado por 2.

Situação 3: analisando a situação, pode-se concluir que **não é possível fazer cálculos e chegar ao resultado,** pois o tempo de resolução e a quantidade de testes são grandezas que, nessa situação, independem uma da outra. Ela tanto pode conseguir resolver todos os testes em um tempo menor do que o previsto, como pode não conseguir resolvê-los dentro do tempo determinado.

Situação 4: não é possível fazer cálculos e chegar ao resultado, somente com essas informações, pois as grandezas altura e idade não variam uma de acordo com a outra em todas as fases da vida, apenas nas fases iniciais, em que médicos fazem tabelas e gráficos para acompanhar o crescimento de crianças.

Como você pôde perceber, em algumas situações é possível comparar a variação das grandezas, fazer os cálculos necessários e prever os resultados, mas em outras isso não é possível.

No decorrer do capítulo as respostas dadas às situações acima se tornarão mais claras. Sempre que achar conveniente, volte a esta página para conferir os resultados.

Usando razão para comparar grandezas

Uma das maneiras de comparar duas grandezas é encontrar a **razão** entre elas, ou seja, encontrar o quociente entre as medidas dessas grandezas.

Você sabe dizer quantas vezes 10 é maior que 2?

E se uma pessoa percorre, de bicicleta, 30 km em 2 horas, você sabe dizer qual foi a velocidade média que ela desenvolveu?

Para responder a essas questões você comparou duas grandezas. Veja como:

1) A razão entre os números 10 e 2 pode ser expressa por 10 : 2 (10 está para 2) ou $\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$, ou seja, comparando os números 10 e 2, podemos dizer que 10 é 5 vezes maior que 2.

2) Se Bruno percorre em sua bicicleta 30 km em 2 horas, qual a razão entre a distância percorrida e o tempo?

Essa razão, conhecida como velocidade média, será igual a: $\frac{30km}{2h} = 15km/h$

De modo geral podemos escrever :

$$v = \frac{d}{t}$$

d → *Distância percorrida*

t → *Tempo gasto*

v → *Velocidade média*

Desenvolvendo competências

1

Se em cada hora Bruno percorre em sua bicicleta 15 km, quantos quilômetros percorrerá em 5 horas? Em quanto tempo percorrerá 90 km? Se achar necessário, construa uma tabela para organizar esses dados.

Da razão à proporção

1) A tabela abaixo estabelece uma relação entre quantidade e custo aproximado de gasolina:

Quantidade	5 litros	10 litros	20 litros	50 litros
Custo	R$ 8,00	R$ 16,00	R$ 32,00	R$ 80,00

Tabela 1

Comparando as grandezas quantidade de gasolina e custo da gasolina, verifique o que ocorre com o custo quando dobramos a quantidade de gasolina.

Agora, multiplique por 10 a quantidade de gasolina. O custo ficou multiplicado por quanto?

E se quisermos reduzir o custo pela metade, o que ocorre com a quantidade de gasolina?

Você pode observar que:

- Quando dobramos a quantidade de gasolina, o custo também dobra.
- Quando dividimos por 2 a quantidade de gasolina, o custo também fica dividido por 2.
- A razão entre o custo e a quantidade de gasolina correspondente é sempre a mesma:

$\frac{8}{5} = 1{,}60$ $\quad \frac{16}{10} = 1{,}60$ $\quad \frac{32}{20} = 1{,}60$ $\quad \frac{80}{50} = 1{,}60$

Quando isto acontece, dizemos que a quantidade de gasolina e o custo da gasolina são **grandezas diretamente proporcionais** e que o valor 1,60 (razão, que corresponde ao preço de 1 litro de gasolina) é a **constante de proporcionalidade.**

Como as razões $\frac{8}{5}$ e $\frac{16}{10}$ são iguais, isto é,

$\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$, temos uma **proporção,** uma igualdade entre duas razões:

$\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ ou $\frac{8}{5} = \frac{32}{20}$ ou $\frac{16}{10} = \frac{80}{50}$

Também podemos escrever:

8 : 5 = 16 : 10	8 : 5 = 32 : 20	16 : 10 = 80 : 50
ou	ou	ou
8 está para 5,	8 está para 5,	16 está para 10,
assim como	assim como	assim como
16 está para 10.	32 está para 20.	80 está para 50.

Desenvolvendo competências

2

A partir do que foi exposto anteriormente, obtenha mais proporções, por exemplo, igualando as razões entre a quantidade de gasolina e os custos correspondentes.

Observe uma **propriedade** muito importante que acontece em todas as proporções:

$\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ $\quad 5 \cdot 16 = 8 \cdot 10$

$\frac{8}{5} = \frac{32}{20}$ $\quad 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20$

$\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$ $\quad 10 \cdot 8 = 5 \cdot 16$

Multiplicando os termos em cruz, obtemos o mesmo resultado.

Vamos utilizar essa propriedade para resolver as questões abaixo, ainda relacionadas ao custo da gasolina da tabela dada.

1) Jorge, ao fazer uma viagem de automóvel, gastou R$ 64,00 com gasolina. Quantos litros de gasolina ele consumiu nessa viagem?

Resolvendo o problema

Vamos chamar a quantidade desconhecida de gasolina de **x**, formar uma proporção, aplicar a propriedade e encontrar esse valor.

Proporção: $= \frac{8 \text{ } reais}{5 \text{ } litros} = \frac{64 \text{ } reais}{x \text{ } litros}$;

Propriedade: $8 \cdot x = 5 \cdot 64$;

Valor de x: $x = \frac{5.64}{8} = 40$.

Portanto, R$ 64,00 equivalem a um consumo de 40 litros de gasolina.

Será que esse é o único modo de resolver esse problema? Você conhece outro modo? Pense um pouco... Na verdade existem vários modos de resolver esse problema. Um deles seria dividir 64 por 8 para saber quantas vezes posso colocar 5 litros de gasolina no carro. Essa divisão dá 8. Isso quer dizer que posso colocar 8 x 5 litros de gasolina, que são 40 litros. Um outro modo é aplicar a constante de proporcionalidade:

$\frac{custo}{quantidade} = 1{,}60$. **Se você conhece o custo, pode determinar a quantidade. Assim, como se conhece a quantidade, pode-se determinar o custo. Faça os cálculos e compare o seu resultado com o anterior.**

2) Se Jorge percorreu 400 km e gastou 40 litros, qual o consumo médio de combustível do automóvel de Jorge?

Resolvendo o problema

Para responder a essa questão você deve se lembrar de que o consumo médio é dado pela **razão entre o total de quilômetros percorridos e a quantidade total de gasolina consumida**.

$$\text{Consumo} = \frac{\text{quantidade de quilômetros}}{\text{quantidade de combustível}} = \frac{400\text{km}}{40 \text{ litros}} = 10 \text{ km}/l$$

Logo, o consumo médio do carro de Jorge é de 10 km por litro de gasolina. Em outras palavras, em média, o carro de Jorge faz 10 km com 1 litro de gasolina.

Desenvolvendo competências

3

Se Jorge percorre 10 km com 1 litro de gasolina, quantos quilômetros ele percorrerá com 15 litros de gasolina?

Quando falamos em consumo médio de combustível do automóvel, estamos considerando que o carro de Jorge não faz exatamente 10 km com exatamente 1 litro de gasolina porque alguns fatores podem alterar o desempenho do automóvel.

Mais proporcionalidade direta - Quantas pizzas?

Figura 5

Carlos e Sônia planejam reunir os funcionários de sua empresa para uma pequena comemoração. Para isso vão encomendar pizzas. Supondo que cada pessoa coma 2 pedaços de pizza, e que cada pizza tamanho grande venha dividida em 8 pedaços, quantas pizzas eles devem encomendar para servir o total de 82 pessoas?

Vamos fazer uma tabela para visualizar esta situação:

Nº de pizzas	Nº de pedaços	Nº de pessoas
1 pizza	8 pedaços - 2 pedaços p/ cada pessoa	4
2 pizzas	16 pedaços - 2 pedaços p/ cada pessoa	8
4 pizzas	32 pedaços - 2 pedaços p/ cada pessoa	16
x pizzas		82

Tabela 2

Analisando a tabela você pode perceber que:

- Quando **dobramos** a quantidade de pizzas, **dobramos** também a quantidade de pessoas.
- Quando **dividimos por 2** a quantidade de pizzas, **dividimos por 2** também a quantidade de pessoas.
- A razão entre o **número de pizzas** com 8 pedaços e o **número de pessoas** que comem 2 pedaços de pizza é sempre a mesma:

$\frac{1}{4}$; $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

Portanto, podemos dizer que essas duas grandezas variam numa **proporcionalidade direta.**

Formando a proporção $\frac{x}{82}=\frac{1}{4}$ e aplicando a propriedade $4 \,.\, x = 82 \,.\, 1$, temos:

$x = \frac{82 \cdot 1}{4} = 20{,}5$.

Para arredondar os cálculos e evitar a falta de pizzas devemos encomendar 21 pizzas.

Desenvolvendo competências

4

1. Tomando como base a pizza grande dividida em 8 pedaços, e considerando que cada pessoa coma 2 pedaços de pizza, qual o número máximo de pessoas que poderá participar de uma festa beneficente onde 150 pizzas serão servidas?

a) 800. *b) 600.* *c) 400.* *d) 100.*

2. Analise os itens abaixo e assinale a alternativa correta. (Tome como base a pizza grande dividida em 8 pedaços).

2.1. Se as 82 pessoas que estavam no encontro que Carlos promoveu comessem somente 1 pedaço de pizza, seriam necessárias e suficientes:

a) 12 pizzas. *b) 11 pizzas.* *c) 10 pizzas.* *d) 8 pizzas.*

2.2. Para servir 20 rapazes que comem quatro pedaços de pizza cada um, seriam necessárias:

a) 12 pizzas. *b) 10 pizzas.* *c) 9 pizzas.* *d) 8 pizzas.*

2.3. A razão entre o número de pizzas necessárias para servir 24 pessoas e o número de pizzas necessárias para servir 143 pessoas, que comem dois pedaços de pizza, é:

a) $\frac{1}{6}$. *b)* $\frac{1}{4}$. *c)* $\frac{3}{4}$. *d)* $\frac{2}{3}$.

3. Uma avenida com 600m de comprimento está sendo asfaltada. Em 3 dias foram asfaltados 150 m da avenida. Supondo que o ritmo de trabalho continue o mesmo, em quantos dias os 600 m da avenida estarão asfaltados?

a) 9. *b) 12.* *c) 15.* *d) 18.*

4. Em todo mapa deve existir proporcionalidade direta entre as grandezas: distância no desenho e distância real. A razão constante entre a distância no desenho e a distância real entre duas cidades é chamada de escala.

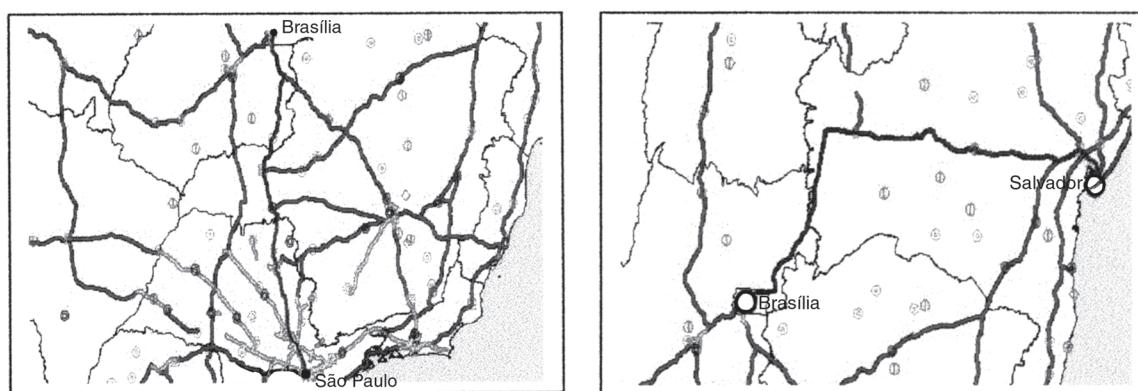



Figura 6

A escala utilizada neste mapa é: $E = \frac{20 \text{ cm}}{1.000 \text{ km}} = \frac{20 \text{ cm}}{100.000.000 \text{ cm}} = \frac{1}{5.000.000}$*, ou seja, a cada 1 cm no desenho correspondem 5.000.000cm = 50km no real.*

Usando esse mesmo mapa, assinale V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações a seguir:

a) *Quanto maior for a medida, em cm, no mapa, menor será a distância entre as cidades. ( )*

b) *A uma medida de 30cm no mapa corresponde uma distância real de 2.000km. ( )*

c) *A distância Brasília-Salvador, que é de aproximadamente 1.400km, corresponde a 28 cm no mapa. ( )*

d) *Cada 3 cm no desenho corresponde a uma distância real de 15km. ( )*

e) *A distância São Paulo-Brasília, que é de aproximadamente 1.000km, está representada por 20cm. ( )*

Outro tipo de proporcionalidade

Voltemos à situação 2 do início do capítulo, na qual um automóvel, deslocando-se a uma velocidade média de 60 km/h, faz um determinado percurso em 4h. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade média utilizada fosse de 120 km/h?

Velocidade	30 km/h	60 km/h	120 km/h	240 km/h
Tempo	8h	4h	2h	1h

Tabela 3

A Tabela 3 mostra a relação entre a velocidade e o tempo:

Comparando as grandezas velocidade média e tempo, verifique o que ocorre com o tempo quando dobramos a velocidade.

Agora, multiplique por 8 a velocidade. O que aconteceu com o tempo?

E se quisermos reduzir o tempo pela metade, o que ocorre com a velocidade?

Você pode observar que:

- Quando multiplicamos a velocidade média por 2, o tempo fica dividido por dois.
- Quando dividimos a velocidade média por 2, o tempo fica multiplicado por 2.
- O produto entre a velocidade média e o tempo é sempre o mesmo:

$60 \cdot 4 = 240$ $\quad 120 \cdot 2 = 240$ $\quad 240 \cdot 1 = 240$

Quando isto acontece, dizemos que a velocidade média e o tempo são **grandezas inversamente proporcionais:** à medida que uma grandeza **aumenta**, a outra **diminui** na mesma proporção.

Como as razões entre as velocidades $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ e os tempos correspondentes $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ são inversas, para obtermos uma proporção precisamos inverter uma das razões, isto é:

$\frac{60}{120} = \frac{2}{4}$ $\quad \frac{30}{120} = \frac{2}{8}$ $\quad \frac{240}{120} = \frac{2}{1}$

Observe que, após inverter uma das razões, a propriedade importante que acontece em todas as proporções continua valendo:

$\frac{60}{120} = \frac{2}{4}$	$\frac{30}{120} = \frac{2}{8}$	$\frac{240}{120} = \frac{2}{1}$
$120 \cdot 2 = 60 \cdot 4$	$120 \cdot 2 = 30 \cdot 8$	$120 \cdot 2 = 240 \cdot 1$

Multiplicando os termos em cruz, obtemos o mesmo resultado.

Portanto, se a velocidade média fosse de 120 km/h, o mesmo percurso seria feito em 2 horas.

Desenvolvendo competências

5

Nas situações abaixo, identifique as grandezas envolvidas, analise-as e verifique se elas variam numa proporcionalidade direta (PD) ou inversa (PI), ou se não existe necessariamente proporcionalidade (NP).

a) ( ) A medida do lado de um terreno quadrado e o perímetro desse terreno.

b) ( ) O ordenado de um carteiro e o número de cartas que ele distribui.

c) ( ) A distância percorrida por um automóvel e a quantidade de combustível consumida.

d) ( ) O número de pedreiros e o tempo gasto para construir um muro.

e) ( ) A idade de um jovem e seu peso.

f) ( ) A medida do lado de um terreno quadrado e a área desse terreno.

g) ( ) A quantidade de pó de café e o número de cafezinhos.

h) ( ) O número de acertadores da megassena e o valor do prêmio distribuído.

Mais proporcionalidade inversa - Quanto receberá cada um?

Um clube decidiu promover uma competição de atletismo entre seus atletas. E, querendo incentivar e motivar os atletas participantes, ofereceu um prêmio de R$ 600,00 a ser dividido entre aqueles que fizerem os 100 metros rasos em menos de 13 segundos. Se 2 atletas conseguirem fazer isso, cada um receberá R$ 300,00. E se 4 atletas conseguirem, quanto receberá cada um ?

Figura 7

Resolvendo o problema

Vamos organizar esses dados:

Nº de atletas	Valor do prêmio
1 atleta	R$ 600,00
2 atletas	R$ 300,00
4 atletas	x

Tabela 4

Comparando as grandezas, número de atletas e valor do prêmio, você pode observar que:

- Quando multiplicamos o número de atletas por 2, o valor do prêmio fica dividido por dois.
- Quando dividimos o número de atletas por 2, o valor do prêmio fica multiplicado por 2.
- O produto entre o número de atletas e o valor do prêmio correspondente é sempre o mesmo:

$1 \cdot 600 = 600 \qquad 2 \cdot 300 = 600 \qquad 4 \cdot 150 = 600$

Portanto, podemos dizer que o número de atletas e o valor do prêmio são **grandezas inversamente proporcionais.**

Formando a **proporção** $\frac{x}{600} = \frac{1}{4}$

(observe que invertemos uma das razões)

e aplicando a **propriedade** 4 . x = 600 . 1,

temos: $x = \frac{600 \cdot 1}{4} = 150.$

Então, se quatro atletas conseguirem chegar ao fim da corrida no tempo previsto, cada um receberá um prêmio de R$ 150,00.

Será que esse é o único modo de resolver esse problema? Você conhece outro modo? Pense um pouco ... Como o produto entre o número de atletas e o prêmio é sempre constante e igual a 600, então, se você conhece o número de atletas, pode determinar o valor do prêmio. Da mesma forma, se conhece o valor do prêmio, pode determinar a quantidade de atletas. Faça os cálculos e compare o seu resultado com o anterior.

Desenvolvendo competências

6

6.1. Calcule o valor do prêmio que receberá cada atleta, se 5 obtiverem êxito.

Leia, analise e responda aos itens abaixo.

6.2. Todos os dias ao entardecer costumo fazer minha caminhada diária de 2 horas, seguindo o mesmo trajeto e mantendo a mesma velocidade média de 2,5 km/h. Outro dia, cronometrei o meu tempo e percebi que estava com uma velocidade média de 5 km/h. Nessas condições, em quanto tempo fiz o mesmo trajeto?

a) $\frac{1}{2}$ *hora.* *b)* $\frac{3}{4}$ *hora.* *c) 1 hora.* *d) 4 horas.*

6.3. Para transportar areia para uma construção, foram usados 4 caminhões com capacidade de 3 m³ cada um. Para fazer o mesmo serviço e com base nessas informações, podemos concluir que:

a) se a capacidade de cada caminhão fosse de 6 m³, seriam necessários 8 caminhões.

b) quanto maior a capacidade do caminhão, menor será o número de caminhões necessários.

c) seriam necessários 10 caminhões, se a capacidade de cada caminhão fosse de 1m³.

d) a quantidade de caminhões não depende da capacidade de cada caminhão.

Vamos analisar outras situações:

BONECAS DE PANO ENCANTAM BRASILEIROS E ESTRANGEIROS

As bonecas de pano feitas em Riacho Fundo, zona rural de Esperança, município da Paraíba, estão encantando brasileiros de norte a sul e já são vendidas na Alemanha, Itália, Inglaterra e Estados Unidos. Atualmente, os 40 artesãos que trabalham na confecção da Boneca Esperança produzem de quinhentas a mil peças todos os meses, a um preço que varia de R$ 2,50 a R$ 60,00.

Figura 8 — Disponível em http:www.desenvolvimento.gov.br.progacoes.PAB

Há um ano e meio, no entanto, a produção era desorganizada e os artesãos tinham dificuldades de vender suas bonecas para outros mercados. Foram promovidas oficinas locais com o objetivo de melhorar a qualidade do produto e orientar os artesãos na composição de preço dos produtos. Hoje, a qualidade de vida dos 40 artesãos que trabalham na produção das bonecas também melhorou. Eles fazem parte da Associação dos Artesãos de Riacho Fundo e têm uma renda mensal entre R$ 150,00 e R$ 400,00.

Desenvolvendo competências

7

Analisando o texto, podemos concluir que:

a) os artesãos eram desorganizados e desqualificados, por isso não vendiam suas bonecas.

b) cada artesão confecciona em média de 500 a 1000 bonecas por mês.

c) para formar uma associação ou cooperativa é preciso ter muitos recursos financeiros.

d) a união e a organização dos artesãos promoveram o sucesso, que pôde ser comprovado matematicamente através dos resultados numéricos obtidos.

Tomando como base os conhecimentos que adquiriu e as experiências que viveu, pense e responda:

- **Você conhece algum caso de união de pessoas que melhorou a qualidade de vida e a qualidade profissional dessas pessoas?**
- **Em algum momento você se uniu ou sentiu necessidade de se unir a outras pessoas para defender uma causa comum?**
- **Quais as vantagens da união de pessoas em cooperativas e associações?**

Para refletir: *Mesmo em lugares simples e distantes e com poucos recursos, pessoas unidas podem superar obstáculos e obter sucesso pessoal e profissional, devendo, para isso:*

- *Buscar ajuda de órgãos ou pessoas responsáveis e competentes para organizar a equipe e a produção.*
- *Possuir em comum um forte desejo de vencer e progredir.*
- *Envolver mais pessoas interessadas para aumentar a produtividade e fortalecer a associação.*

NO PRÓXIMO SÉCULO, A ÁGUA DOCE SERÁ O RECURSO NATURAL
MAIS DISPUTADO NA MAIORIA DOS PAÍSES.

O Brasil possui 13,7% de toda a água doce do planeta e, desse total, 7% encontram-se na região da bacia hidrográfica do rio Paraná, que inclui o rio Tietê. Existe água em abundância, mas existe também o desperdício e o comprometimento dos mananciais. Você sabe quanto custa a água que consumimos? Um real cada mil litros. Parece pouco, mas esse custo poderá ser bem mais alto se a água não for utilizada de forma adequada, sem desperdícios. O cálculo da tarifa é progressivo: quanto maior o consumo, maior é o preço. A faixa de consumo de água por pessoa varia de 150 a 400 litros por dia. Uma maneira de detectar vazamento é fechar todas as torneiras e registros da casa e verificar se, no hidrômetro, aparelho que mede o consumo de água, ocorre movimento dos números ou do ponteiro do relógio. Caso isso aconteça, certamente existe vazamento. Por exemplo, um pequeno buraco de dois milímetros, do tamanho da cabeça de um prego, vai desperdiçar em torno de 3.200 litros de água por dia. Esse volume é suficiente para o consumo de uma família de 4 pessoas, durante 5 dias, incluindo limpeza da casa, higiene pessoal, preparação de alimentos e água para beber.

Desenvolvendo competências

8

Com base nos dados acima e supondo que essa família de 4 pessoas não detectou um vazamento em sua residência durante 3 dias, podemos então dizer que houve um desperdício de água suficiente para o consumo de:

a) 2 pessoas durante 7 dias.

b) 1 pessoa durante 12 dias.

c) 8 pessoas durante 3 dias.

d)10 pessoas durante 2 dias.

Você já observou qual o consumo médio mensal de água de sua residência? Que tal dar uma olhadinha na última conta para conferir? E o consumo diário de água por pessoa?

Se em sua casa residem 5 pessoas e o consumo mensal de água é de 30 m^3, podemos fazer os seguintes cálculos para obter o consumo médio diário por pessoa:

Como 1 m^3 = 1000 litros, então 30 m^3 =

= 30 000 litros por mês;

30 000 litros : 5 pessoas = 6000 litros por pessoa por mês;

6000 litros : 30 dias = 200 litros por pessoa por dia.

E se em sua casa moram apenas 3 pessoas? Qual o consumo diário de água por pessoa? Esse valor é razoável? O texto afirma que o consumo médio por pessoa varia de 150 a 400 litros de água por dia, o que envolve uma grande variação numérica e, com certeza, financeira. Converse com parentes e amigos e compare os resultados.

Você sabia que a válvula de descarga ao ser acionada gasta de 10 a 30 litros de água, enquanto a caixa acoplada ao vaso descarrega apenas 6 litros de água por vez?

Você economiza água de algum modo? Se não economiza, já pensou em alguma forma de economizar?

Você sabia que a vazão de uma torneira é diretamente proporcional ao tempo em que ela fica aberta? Por exemplo, se você escovar os dentes em 5 minutos deixando a torneira aberta, estará gastando 12 litros de água por dia, quantidade que uma pessoa poderia beber durante 6 dias. No entanto, se escovar os dentes de maneira econômica, ou seja, mantendo a torneira fechada e só usando água quando for necessário, gastará, em média, 1 litro. A economia será de aproximadamente 11 litros de água por dia. Pense nisso sempre que for escovar os dentes, fazer a barba etc.

Para refletir: *Hoje, quando há algum desperdício pelo uso abusivo de água, ninguém se incomoda. Mas esse comportamento terá de mudar. Economizar e conservar a água é fundamental. A consciência de que é preciso mudar está crescendo. Todos nós sempre dependemos da água. Agora a água também dependerá de nós, de nossas atitudes e comportamentos, de nosso grau de civilidade.*

(http://www.tvcultura.com.br/aloescola/ciencias)

Você pode intervir e mudar essa realidade. Para isso é preciso ter:

- Consciência do que está ocorrendo e manter-se informado.
- Argumentos consistentes para conversar e informar outras pessoas.
- Força de vontade e dedicação para mudar o que realmente precisa ser mudado.

Porcentagem e juros

Quase todos os dias vemos ou ouvimos a expressão por cento, indicando acréscimo ou desconto, ou noticiando a situação econômica. Também ocorrem inúmeras operações envolvendo dinheiro, como empréstimos, aplicações financeiras, compra e venda, pagamento de impostos etc. Boa parte das perdas de dinheiro que as pessoas têm ao fazer negócios depende do cálculo de porcentagens que estão presentes nessas situações. Por isso, precisamos conhecer o conceito matemático de porcentagem para saber interpretá-lo e aplicá-lo corretamente sempre que for necessário.

Liquidação de inverno
Tudo com 30% de desconto

Situação 1

Gasolina recebe novo
aumento:2%

Situação 2

O que significa % ?

O sinal % é uma abreviação da expressão **dividido por 100.**

Lembre-se que lemos 30% = 30 por cento = $\frac{30}{100}$.

Porcentagem é uma comparação com 100. Nos anúncios acima temos:

Na situação 1, uma taxa percentual de 30% de desconto. Como 30% = $\frac{30}{100}$, significa que, em cada R$ 100,00, haverá um desconto de R$ 30,00.

Na situação 2, uma taxa percentual de aumento de 2%. Como 2% = $\frac{2}{100}$, significa que, em cada R$ 100,00, haverá um aumento de R$ 2,00.

Além das situações acima, você conhece outras que envolvam cálculos com porcentagem? Pense um pouco... Acredito que tenha pensado e respondido que conhece muitas situações. Pois é, quantas vezes precisamos recorrer à nossa calculadora para conferirmos se a oferta de um determinado produto vale a pena mesmo. E como é bom sabermos efetuar os cálculos e chegarmos a uma conclusão. Por isso, mãos à obra!

Vamos analisar algumas situações:

1) O dono de uma sorveteria, preocupado com a qualidade e a quantidade de seus sorvetes, realizou uma pesquisa com seus clientes. Dos 180 que responderam, constatou que 60% preferem sorvete de chocolate e o restante prefere os demais sabores.

Resolvendo o problema

a) Dentre os clientes que responderam à pesquisa, quantos preferem sorvete de chocolate?

Sabemos que a taxa percentual que representa esse número de clientes é 60% do número total de clientes. Então devemos calcular 60% de 180:

60% de180 = $\frac{60}{100}$. 180 = $\frac{60 \cdot 180}{100} = 108$.

Portanto 108 clientes preferem sorvete de chocolate.

Você sabia que podemos calcular o percentual de um número de duas maneiras? Veja o caso de 60% de 180.

Forma fracionária: $\frac{60}{100}$. 180 = $\frac{60 \cdot 180}{100} = 108$.

Forma decimal: 0,60 . 180 = 108.

Pois é, a forma como os cálculos são efetuados é uma escolha pessoal. Escolhemos aquela que achamos mais apropriada, mais conveniente, mas é interessante saber que existem outras formas de efetuarmos esses cálculos.

b) Dentre os clientes que responderam à pesquisa, qual o percentual e o número de clientes que preferem sorvete de outros sabores?

Se a taxa percentual dos que preferem sorvete de chocolate é 60% e a taxa que representa o total de clientes é 100%, então, ao subtrairmos 60% de 100%, encontramos a taxa de 40%, que representa os clientes que preferem sorvete de outros sabores.

Para encontrar o número de clientes que representa essa taxa percentual, vamos usar o mesmo procedimento do item a:

40% de 180 = $\frac{40}{100}$. 180 = $\frac{40 \cdot 180}{100} = 72$. Portanto, 72 clientes preferem sorvete de outros sabores.

• Como no item a), utilize a forma decimal para calcular a porcentagem e confirme o resultado encontrado.

• Você sabe encontrar o número de clientes que preferem sorvete de outros sabores de outra forma?

Vamos pensar juntos... Se o número total de clientes pesquisados é 180 e, destes, 108 preferem sorvete de chocolate, e sabemos que os demais preferem de outros sabores, podemos efetuar a subtração 180 – 108 para encontrar os 72 clientes que procuramos.

Observe a tabela abaixo para melhor visualizar esta situação:

	Taxa de porcentagem de clientes	Número de clientes
Sorvete de chocolate	60%	108
Sorvete de outros sabores	100% - 60% = 40%	180 - 108 = 72
Total	100%	180

Tabela 5

c) 99 clientes representam mais ou menos que 50% dos clientes que responderam à pesquisa?

Fique esperto!
Se 180 representa 100%, então 90 representa 50%, ou seja, a metade de 180, por isso, com certeza, 99 deve representar mais do que 50%.

Taxa percentual de clientes	Número de clientes
100%	180
x	99
50%	90

Tabela 6

Observe que:

- Quando dividimos por 2 a porcentagem de clientes, o número de clientes também fica dividido por 2.
- A razão entre a porcentagem de clientes e o número de clientes correspondentes é sempre a mesma.

Portanto, como as grandezas porcentagem de clientes e número de clientes variam numa proporcionalidade direta, podemos formar uma proporção, aplicar a propriedade e encontrar o valor desejado:

Proporção: $\frac{100}{x} = \frac{180}{99}$;

Propriedade: $180 \,.\, x = 100 \,.\, 99$;

Valor de x: $\frac{100 \cdot 99}{180} = 55$

Portanto, 99 clientes representam 55% do total de clientes.

9 Desenvolvendo competências

Faça os cálculos e responda:
Para os 180 clientes que responderam a pesquisa:

9.1. Quantos clientes representam 12% do total de clientes?

9.2. Quanto por cento do total de clientes representam 135 clientes?

a) 45%. *b) 60%.* *c) 70%.* *d) 75%.*

AUTOMEDICAÇÃO

É bastante freqüente entre os brasileiros o hábito de tomar medicamentos por conta própria, por sugestão de amigos ou pessoas não habilitadas a receitar. Na área de saúde, esse procedimento chama-se automedicação – que quer dizer "medicar a si mesmo".

Atualmente, a intoxicação por medicamentos é uma ocorrência comum. Em 1998, por exemplo, o Centro de Assistência Toxicológica (CEATOX), órgão da Universidade de São Paulo (USP), registrou 3.211 casos de intoxicação, dos quais cerca de 40% provocados por uso de medicamentos. Os farmacêuticos consideram que grande parcela desses casos resulta da automedicação praticada no país.

Segundo dados da Organização Mundial da Saúde (OMS) e do Ministério da Saúde, o mercado brasileiro dispõe de mais de 32 mil medicamentos – motivo pelo qual o Brasil situa-se em sexto lugar entre os países consumidores de medicamentos, respondendo por R$ 14,3 bilhões dos 529 bilhões movimentados no mercado mundial de medicamentos. No entanto, sabe-se que, para tratar as mais diversas doenças, cerca de 420 produtos seriam suficientes.

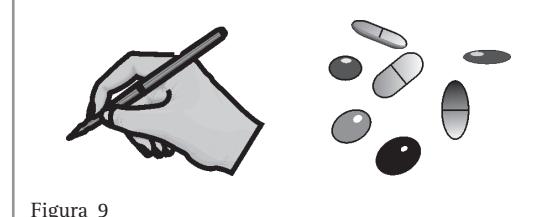



Figura 9

Adaptado de www.nib.unicamp.br

Desenvolvendo competências

10

Analisando o texto acima, interpretando e avaliando as variações percentuais nele contidas, podemos concluir que:

a) o mercado brasileiro possui um número insuficiente de medicamentos para tratar as mais diversas doenças existentes.

b) mais da metade dos casos de intoxicação registrados em 1998 pelo CEATOX foram provocados pela automedicação.

c) se os 420 produtos estiverem entre os 32 mil existentes no Brasil, aproximadamente 1,3% do total de medicamentos disponíveis seriam suficientes para tratar as mais diversas doenças.

d) o Brasil ocupa o 6º lugar no mundo em relação aos casos registrados de automedicação.

• Você costuma se automedicar? Conhece alguém que se automedicou? Quais os resultados obtidos?

• Você sabia que um mesmo remédio, com dosagem idêntica, usado durante o mesmo período de tempo por duas pessoas diferentes, pode dar excelentes resultados para uma delas e não surtir efeito na outra?

• Por que será que existem tantos medicamentos no Brasil?

• Será que somente a liberdade que as indústrias têm para fabricar, anunciar e vender seus produtos justifica esse elevado número de medicamentos? O fato de nos automedicarmos com xaropes, analgésicos, gotas nasais, laxantes e outros medicamentos aparentemente "inofensivos" não contribui também para o crescimento e fortalecimento das indústrias farmacêuticas?

O que você acha que poderia ser feito para tentar diminuir esse índice elevado de automedicação?

Para refletir: *A vida saudável não está sempre no balcão da farmácia. Os cuidados de higiene pessoal e ambiental, hábitos sadios e qualidade de vida promovem a saúde. A prática de esportes, caminhadas, alimentação balanceada, lazer e descanso dão mais sabor e qualidade à vida humana.*
Leia mais sobre automedicação. Busque idéias consistentes para argumentar com outras pessoas e de alguma forma intervir e mudar essa realidade nada saudável do consumo exagerado e inadequado de medicamentos no Brasil.

Vamos analisar outras situações:

1) Alberto trabalha em uma pequena firma e recebe um salário mensal de R$ 800,00. Como fez alguns cursos de atualização profissional, foi promovido e recebeu um **aumento** de 15% em seu salário. Qual será, então, o novo salário de Alberto?

Resolvendo o problema

Calculamos 15% de 800 e a seguir **somamos** ao valor inicial de 800, para obtermos o valor do novo salário.

15% de 800 = 0,15 . 800 = 120;

800 + 120 = 920; portanto, o novo salário será R$ 920,00.

Você conhece outro modo de resolver esse problema? Vamos pensar juntos...

Se hoje o salário representa 100% e o aumento será de 15%, então o novo salário representará 115% do salário inicial. Lembrando que 115% = 1,15, faça os cálculos e confira o resultado.

Desenvolvendo competências

11

Aproveite os dados do problema anterior e resolva este:

Se Alberto passasse a receber um salário de R$ 1.000,00, poderíamos afirmar que:

a) *ele teve um aumento percentual de 50%.*

b) *o aumento de R$ 200,00 equivale a um aumento de 20% no salário inicial.*

c) *a porcentagem que representa o novo salário seria de 125%.*

d) *um salário de R$ 1000,00 representa um aumento superior a 30% sobre o salário antigo.*

2) Uma revendedora de automóveis anunciou a venda de um modelo popular usado por R$ 7.500,00. Percebendo que o interesse dos clientes pelo automóvel foi pequeno, decidiu abaixar o preço para R$ 6.900,00. Qual a taxa de **desconto** aplicada ao automóvel?

Resolvendo o problema

Obtemos o valor do desconto, em reais, efetuando: R$ 7.500,00 – R$ 6.900,00, e a seguir calculamos quanto por cento esse valor representa de R$ 7.500,00.

Taxa de porcentagem	Valor (R$)
100%	7500
?	600

Tabela 7

Cálculos:

Proporção: $\frac{100}{x} = \frac{7500}{600}$

Propriedade: $7500 \cdot x = 100 \cdot 600$

Valor de x: $\frac{100 \cdot 600}{7500} = 8$

Portanto, a taxa de desconto aplicada foi de 8%.

Como no item anterior, será que é possível fazer os cálculos de outro modo?

O que representa a divisão $\frac{6.900}{7.500}$? Quanto por cento 6900 representa de 7500?

Termine os cálculos e compare-os com o resultado obtido acima.

Desenvolvendo competências

12

Aproveite os dados do problema acima e responda à seguinte questão:

Se a revendedora tivesse aplicado um desconto de 5,5% sobre o valor inicial do automóvel, poderíamos afirmar que:

a) o valor do desconto seria de R$ 500,00.

b) o valor do automóvel após esse desconto seria de R$ 7.150,50.

c) a porcentagem que representa o valor do automóvel após o desconto seria de 95,5%.

d) o valor desse desconto seria superior a R$ 400,00.

Observações importantes:

Se a um determinado valor for aplicado um acréscimo de 10%, podemos calcular o novo valor apenas multiplicando o valor inicial por 1,1 , pois

$$100\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1,1.$$

Se a um determinado valor for aplicado um desconto de 10%, podemos calcular o novo valor apenas multiplicando o valor inicial por 0,9, pois

$$100\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100} = 0,9.$$

Essas observações facilitam muito os nossos cálculos, mesmo os feitos com o uso da calculadora.

Dada a sua importância, observe alguns exemplos expostos a seguir:

	Multiplicar o valor inicial por:
Aumento de 10%	*1,1*
Aumento de 30,5%	*1,305*
Aumento de 50%	*1,50*
Aumento de 100%	*2*
Tabela 8	

	Multiplicar o valor inicial por:
Desconto de 8%	*0,92*
Desconto de 10%	*0,9*
Desconto de 17,5%	*0,825*
Desconto de 50%	*0,5*
Tabela 9	

Veja como alguns cálculos dos valores expostos acima foram efetuados:

- Aumento de 10%:

$$110\% + 10\% = 110\% = \frac{110}{100} = 1{,}1.$$

- Desconto de 10%:

$$110\% - 10\% = 90\% = \frac{90}{100} = 0{,}9.$$

- Desconto de 17,5%:

$$100\% - 17{,}5\% = 82{,}5\% = \frac{82{,}5}{100} = 0{,}825.$$

- Aumento de 100% :

$$100\% + 100\% = 200\% = \frac{200}{100} = 2.$$

Aproveite os conceitos utilizados na construção da tabela acima e resolva:

Se uma empresa possui 360 funcionários e 25% deles utilizam transporte próprio, qual o número de funcionários dessa empresa que utiliza outros meios de transporte?

Resolvendo o problema

100% - 25% = 75%; 360 . 0,75 = 270;

270 funcionários.

13 Desenvolvendo competências

13.1. Um litro de leite custava R$ 0,80 e sofreu um acréscimo de 15%. Qual será o novo valor do litro desse leite?

13.2. Solaine abriu com R$ 500,00 uma caderneta de poupança no dia 2 de maio. Não fez nenhum outro depósito durante o mês. Se o rendimento nesse mês foi de 0,7%, qual será o saldo de Solaine no dia 3 de junho?

a) R$ 503,50. *b) R$ 507,70.* *c) R$ 535,00.* *d) R$ 570,00.*

Aumentos e descontos sucessivos

Vamos analisar algumas situações:

1) Uma loja de material esportivo estava vendendo uma camisa de um time de futebol por R$ 100,00 no mês de janeiro e aplicou um aumento de 10% no mês de abril. Como no mês de junho o time ganhou um torneio e as vendas aumentaram, resolveu aplicar outro aumento de 10%. Qual a porcentagem total de aumento aplicado à camisa desse time durante esse 1º semestre?

Alguma situação semelhante a essa já ocorreu com você? Será que o aumento foi de 20%? Como você faria os cálculos para descobrir a porcentagem total do aumento? Pense um pouco...

Resolvendo o problema

Sobre o valor inicial de R$100,00, vamos aplicar o 1º aumento:

1º aumento:

$100\% + 10\% = 110\% = 1{,}1;$

$100 \cdot 1{,}1 = 110.$

Sobre o valor de R$ 110,00, obtido após o primeiro aumento, vamos aplicar o 2º aumento:

$100\% + 10\% = 100\% = 1{,}1;$

$110 \cdot 1{,}1 = 121.$

Você pode constatar que, se a camisa custava R$ 100,00 em janeiro e passou a custar R$ 121,00 em junho, houve um aumento de R$ 21,00, que equivale a 21% .

Você conhece outro modo de resolver esse problema? Esse modo escolhido não é único, existem diversos procedimentos corretos que levam ao resultado. Você deve escolher a forma que achar mais apropriada, mais conveniente ao seu modo de interpretar e resolver questões.

Como na situação anterior, aplique dois aumentos sucessivos de 10% sobre os seguintes valores iniciais:

a) R$ 80,00. b) R$ 6,00.

Agora compare os resultados obtidos com o do item anterior. O que você pode concluir? Será que dois aumentos sucessivos de 10% equivalem sempre a um único aumento de 21%?

Observe que efetuamos os seguintes cálculos:

$100 \cdot \mathbf{1{,}1} \cdot \mathbf{1{,}1} =$

$100 \cdot \mathbf{(1{,}1)^2} =$

$100 \cdot \mathbf{1{,}21} = 121$

Como 1,21 = 121% e 121% = 100% + 21%, obtemos então, o aumento de 21%.

2) Algumas lojas de roupas e acessórios costumam fazer no mês de maio uma liquidação dos seus artigos de verão para, então, colocar nas vitrines a nova coleção de inverno. Flávia, sabendo dessa liquidação, não comprou uma blusa que custava R$ 50,00 em março. Ela teve sorte, pois, sobre esse valor, foram aplicados dois descontos sucessivos, um em abril de 10% e outro em maio de 20%. Qual o desconto total aplicado sobre o valor da blusa? Qual o valor final da blusa após os descontos?

Resolvendo o problema

Como na situação anterior, vamos aplicar os descontos separadamente:

1º desconto (sobre o valor inicial):

$100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9;$

$50 \cdot 0{,}9 = 45$

2º desconto (sobre o valor obtido após o 1º desconto):

100% - 20% = 80% = 0,8%;

45 . 0,8 = 36

Se a blusa custava R$ 50,00 em março e passou a custar R$ 36,00 em maio, houve um desconto de R$ 14,00, que equivale a 28%.

$\left(\frac{100}{x} = \frac{50}{14} ;\ 50 \,.\, x = 14 \,.100;\ \ x = \frac{14 \cdot 100}{50} = 28 \right)$

Portanto, o desconto total aplicado sobre o valor da blusa foi 28% (**Atenção**: o desconto total não foi igual à soma dos descontos, ou seja, 30%) e o valor final da blusa após os descontos foi R$ 36,00.

Você saberia encontrar esse desconto total de outro modo? Pense um pouco... Seria possível aplicar um desconto único e encontrar o preço final da blusa?

Observe os cálculos que efetuamos:

50. **0,9 . 0,8**

50 . **0,72** = 36

Como 0,72 = 72% e 72% = 100% - 28%, obtemos, então, o desconto total de 28%.

3) Sobre uma mercadoria que custa R$ 200,00 houve um **desconto** de 20% e depois outro **desconto** de 30%, então:

a) Qual a porcentagem final do desconto sobre essa mercadoria?

0,8 . 0,7 = 0,56;

0,56 = 56% e 100% **-** 56% **= 44%**

Portanto, a porcentagem final do desconto sobre essa mercadoria será de 44%.

b) Qual o valor, em reais, do desconto total?

44% de 200 = 0,44 . 200 = 88. Portanto, o valor total do desconto é R$ 88,00.

c) Qual o valor final da mercadoria após os descontos?

200 – 88 = 112. Portanto, o valor final da mercadoria é R$ 112,00.

A ordem em que os descontos ou aumentos são calculados não altera os cálculos, pois

0,8 . 0,7 . x = 0,7 . 0,8 . x, onde x representa o preço inicial da mercadoria.

Algumas pessoas erram a solução desse tipo de problema porque usam a soma. Mas, como você pôde observar, utilizamos a **multiplicação** e não a soma.

Ao contrário da situação 4, agora você calcula os descontos separadamente e depois compara os resultados encontrados através dos cálculos com o desconto único.

Desenvolvendo competências

14

Se, em um determinado país, a taxa de inflação no mês de maio foi de 2% e a do mês de junho foi de 5%, então:

14.1. A taxa de inflação acumulada nesses dois meses foi de:

a) 7%. *b) 7,1%.* *c) 8,2%.* *d) 10%.*

14.2. O valor de um objeto no dia 1º de julho, sabendo que ele custava R$ 50,00 em 30 de abril e que recebeu aumento de acordo com a inflação, será de:

a) R$ 53,00. *b) R$ 53,55.* *c) R$ 55,50.* *d) R$ 57,00.*

Os juros no dia-a-dia

Figura 10

Vejamos algumas situações:

1) Uma loja de informática está vendendo um computador por R$ 2500,00 à vista, ou em 2 parcelas:
R$ 1.500,00 de entrada e R$ 1.500,00 ao fim de 30 dias. O preço desse computador à vista é diferente do preço a prazo, porque estão sendo cobrados juros pelo parcelamento da dívida. Qual será o valor do juro mensal que essa loja está cobrando pelo parcelamento?

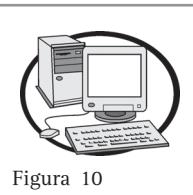
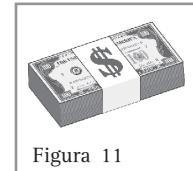



Figura 11

2) Mirella emprestou R$ 300,00 a Juliane, que, depois de 1 mês, devolveu-lhe R$ 315,00. Mirella recebeu então, como compensação, R$ 15,00 de **juro**.

O **juro** é uma **compensação em dinheiro** que a empresa ou a instituição financeira cobra por estar **parcelando** ou financiando uma dívida.

Quando o cliente **aplica** seu dinheiro em um banco, está emprestando esse dinheiro ao banco, e por isso recebe uma quantia de **juro** pelo empréstimo.

Para conhecermos melhor as operações que envolvem juros, vamos ver os principais nomes usados nesses cálculos e suas respectivas abreviações:

Capital inicial (C) - é o dinheiro que se empresta ou que se toma emprestado.

Montante (M) - é a soma do capital inicial aplicado ou tomado emprestado e do juro.

Tempo ou prazo (t) - é o tempo que decorre desde o início até o final de uma dada operação financeira.

Taxa de juro (i) – é a taxa percentual que se recebe ou se paga em relação a um dado intervalo de tempo.

Na determinação dos juros:

- **A taxa e o tempo devem estar relacionados na mesma unidade (dia, mês, ano etc).**
- **Adota-se o chamado prazo comercial, em que o mês é considerado como tendo 30 dias e o ano como tendo 360 dias.**

Existem duas modalidades ou regimes de juro: simples e composto.

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza juros compostos, porque há interesse de se escolher um intervalo de tempo menor (dia, mês ou ano) para que, ao final de cada intervalo, o juro correspondente seja pago.

O regime de juros simples é utilizado com menos freqüência, geralmente nas operações de curtíssimo prazo.

JUROS SIMPLES – os juros de cada intervalo de tempo são calculados sempre em relação ao capital inicial emprestado ou aplicado e, com isso, o valor do juro em cada intervalo é sempre constante.

Observe a situação abaixo:

Vitor aplicou R$ 2.000,00 em um banco que paga **juro simples** de 1% ao mês (a.m). Após 3 meses de investimento, qual será o saldo final ou montante (capital + juro) de Vitor?

Resolvendo o problema

Você já resolveu um problema semelhante a esse anteriormente. A única diferença entre os problemas encontra-se no tempo. Solaine aplicou seu dinheiro por 1 mês e Vitor por 3 meses. Use os conhecimentos que possui e os que foram apresentados nesse capítulo para encontrar o saldo final de Vitor ao final de três meses.

Se você concluiu que Vitor possuirá R$ 2.060,00, acertou. Veja uma das maneiras de encontrar esse resultado.

Capital (C) = R$ 2.000,00;
Taxa (i) = 1% a.m;
Tempo (t) = 3 meses.

Veja que a taxa e o tempo estão relacionados na mesma unidade: mês.

Mês	Montante no início de cada mês	Juro do mês	Montante no final de cada mês
1º	2.000	1% de 2.000 = 20	2.020
2º	2.020	1% de 2.000 = 20	2.040
3º	2.040	1% de 2.000 = 20	2.060

Tabela 10

Vitor terá um montante de R$ 2.060,00 após três meses de investimento.

Desenvolvendo competências

15

Aproveite os dados e complete a tabela, imaginando que Vitor tenha aplicado seu dinheiro por mais dois meses.

JUROS COMPOSTOS (também conhecido como "juros sobre juros") – os juros de cada intervalo de tempo são calculados e somados ao capital inicial desse intervalo, que por sua vez passam a render juros também. É como funcionam as cadernetas de poupança.

Observe a situação abaixo:

Suponhamos agora que Vitor tenha aplicado seus R$ 2.000,00 em um banco que paga **juro composto** de 1% ao mês (a.m). Então, após 3 meses de investimento, qual será o saldo final ou montante (capital + juro) de Vitor?

Resolvendo o problema

Mês	Montante no início de cada mês	Juro do mês	Montante no final de cada mês
1º	2.000	1% de 2.000 = 20	2.020
2º	2.020	1% de 2.020 = 20,2	2.040,20
3º	2.040,20	1% de 2.040,20 = 20,40	2.060,60

Tabela 11

Vitor terá um montante de R$ 2.060,60 após três meses de investimento.

Você se recorda da situação referente a aumentos sucessivos? Esse problema tem alguma semelhança com aquele? Observe os cálculos que fizemos para encontrar o montante ao final de três meses:

$((2000 \cdot 1{,}01) \cdot 1{,}01) \cdot 1{,}01 = 2000 \cdot (1{,}01)^3$

Com o auxílio de uma calculadora, efetue este cálculo e compare o resultado com o da tabela. Parece complicado, mas quando entendemos o processo, tudo se torna mais simples.

Desenvolvendo competências

16

Utilize o modo que achar melhor ou mais simples para continuar os cálculos da tabela acima, imaginando que Vitor tenha aplicado seu dinheiro por mais dois meses.

Vamos voltar à situação sobre as formas de pagamento do computador.

Como R$ 1.500,00 devem ser pagos no ato da compra, ou seja, à vista, na verdade apenas a quantia de R$ 1.000,00 será financiada, pela qual se pagará R$ 1.500,00. Portanto, está sendo cobrado um valor de R$ 500,00 de juro, que corresponde a **50%** de R$ 1.000,00. Um absurdo!

Você costuma ficar atento aos juros cobrados pelo parcelamento, como no caso acima? Acreditamos que, depois desta leitura, ficará mais atento ainda, pois é muito importante observar nesses problemas o quanto realmente está sendo financiado, para não nos enganarmos nem sermos enganados.
No caso acima, a primeira parcela foi paga à vista, logo não se deve fazer incidir juros sobre a mesma. Se o financiamento tivesse sido feito em duas vezes sem entrada, deveriam se fazer incidir juros relativos a um mês sobre a primeira prestação e relativos a dois meses sobre a segunda prestação.

Vamos analisar outra situação.

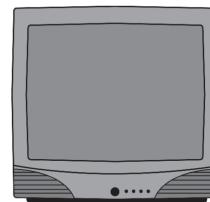



Figura 12

Dona Vera possui uma televisão muito antiga de 14 polegadas, por isso há algum tempo vem juntando uma certa quantia em dinheiro para comprar uma televisão maior e mais moderna. Quando viu a oferta de uma televisão de 20 polegadas em 10 vezes de R$ 62,20 (Figura 12), não pensou em aguardar um pouco mais para comprar uma televisão com uma tela maior (Figura 13) e nem sequer fez os cálculos para verificar quanto estava pagando de juros.

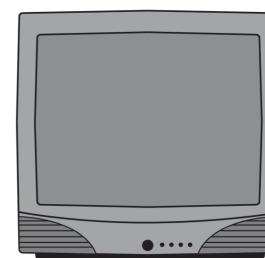



Figura 13

Desenvolvendo competências

17

Com base nessas informações, organize os dados e responda:

17.1. Que valor, em reais, Dona Vera pagou de juros por ter parcelado a TV?

17.2. Quantos por cento, aproximadamente, sobre o preço à vista, Dona Vera pagou de juros?

a) 12,72%. *b) 17,21%.* *c) 10,12%.* *d) 11,27%.*

17.3. Se até o momento Dona Vera tivesse conseguido economizar R$ 400,00 e decidisse não comprar a TV de 20", e aplicasse todo mês os R$ 62,20 juntamente com os R$ 400,00 em um banco que paga juro composto a uma taxa de 1% ao mês, em quanto tempo ela poderia comprar a TV de 29" da figura 13?

Iniciamos a organização dos dados na tabela abaixo. Termine os cálculos e encontre a resposta correta. Os cálculos parecem complexos, mas se você entendeu o processo, que é o fundamental, com o auxílio de uma calculadora eles se tornam simples.

Mês	Montante no início de cada mês	Juros de cada mês	Montante no final de cada mês
1º	400,00 + 62,20 = 462,20	4,62	466,82
2º	466,82 + 62,20 = 529,02	5,29	534,31
3º	534,31 + 62,20 = 596,51	5,96	602,47

Tabela 12

Observe como alguns cálculos da tabela foram efetuados:

1º mês: *Juros: **1% de** 462,20 **= 4,62.***
*Montante no final do mês (valor anterior + juros): **462,20 + 4,62** = 466,82.*

2º mês: *Juros: **1% de** 529,82 **= 5,29.***
*Montante no final do mês (valor anterior + juros): **529,82 + 5,29** = 534,31.*

3º mês: *Juros: **1% de** 596,51 **= 5,96.***
*Montante no final do mês (valor anterior + juros): **596,51 + 5,96** = 602,47.*

Antes de comprar um objeto você costuma verificar se o preço à vista não oferece muito mais vantagens do que o parcelamento, mesmo que isso implique esperar um pouco mais para obter esse objeto?

Não se esqueça de que não podemos comparar diretamente uma quantia de dinheiro agora com uma em outro instante, passado ou futuro.

Para finalizar

Esperamos que ao término da leitura desse capítulo você:

- Tenha dominado e entendido melhor a linguagem matemática específica usada nesse texto, para ler, ouvir, enfim, comunicar-se corretamente.
- Tenha ampliado seus conhecimentos sobre variação de grandezas e que essa ampliação venha a facilitar a compreensão e a resolução de problemas do cotidiano que envolvam esses conceitos matemáticos.
- Sinta necessidade e prazer em exercitar a leitura de revistas ou jornais para manter-se informado sobre os principais fatos que ocorrem no Brasil e no mundo. E, ao encontrar grandezas nessas leituras, procure identificá-las e avaliar suas variações para entender, explicar e argumentar com consistência sobre os processos naturais, sócio-econômicos e tecnológicos que vivenciamos.
- Possa recorrer aos conhecimentos adquiridos e a outros tantos disponíveis e relacioná-los às suas experiências de vida para contribuir com idéias e propostas que possam, sempre que necessário, intervir de forma concreta e solidária na realidade em que vivemos.

Conferindo seu conhecimento

1 *75 km e 6 horas.*

2 *Mais proporções:* $\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$ ou $\frac{10}{50} = \frac{16}{80}$.

3 *150 km.*

4 *1. Resposta: (b).*

2.1. Resposta: (b). *2.2. Resposta: (b).* *2.3. Resposta: (a).*

3. Resposta: (b).

4. (a) F *(b) F* *(c) V* *(d) F* *(e) V*

5 *(a) PD.* *(b) NP.* *(c) PD.* *(d) PI.* *(e) NP.*

(f) NP. *(g) PD.* *(h) PI.*

6 *1. R$ 120,00.*

2. Resposta: (c).

3. Resposta: (b).

7 *Resposta: (d).*

8 *Resposta: (b).*

9 *9.1. 21,6 clientes.* *9.2. Resposta: (d).*

10 *Resposta: (c).*

11 *Resposta: (c).*

12 *Resposta: (d).*

13 *13.1. R$ 0,92* *13.2. Resposta: (a).*

14 *14.1. Resposta: (b).* *14.2. Resposta: (b).*

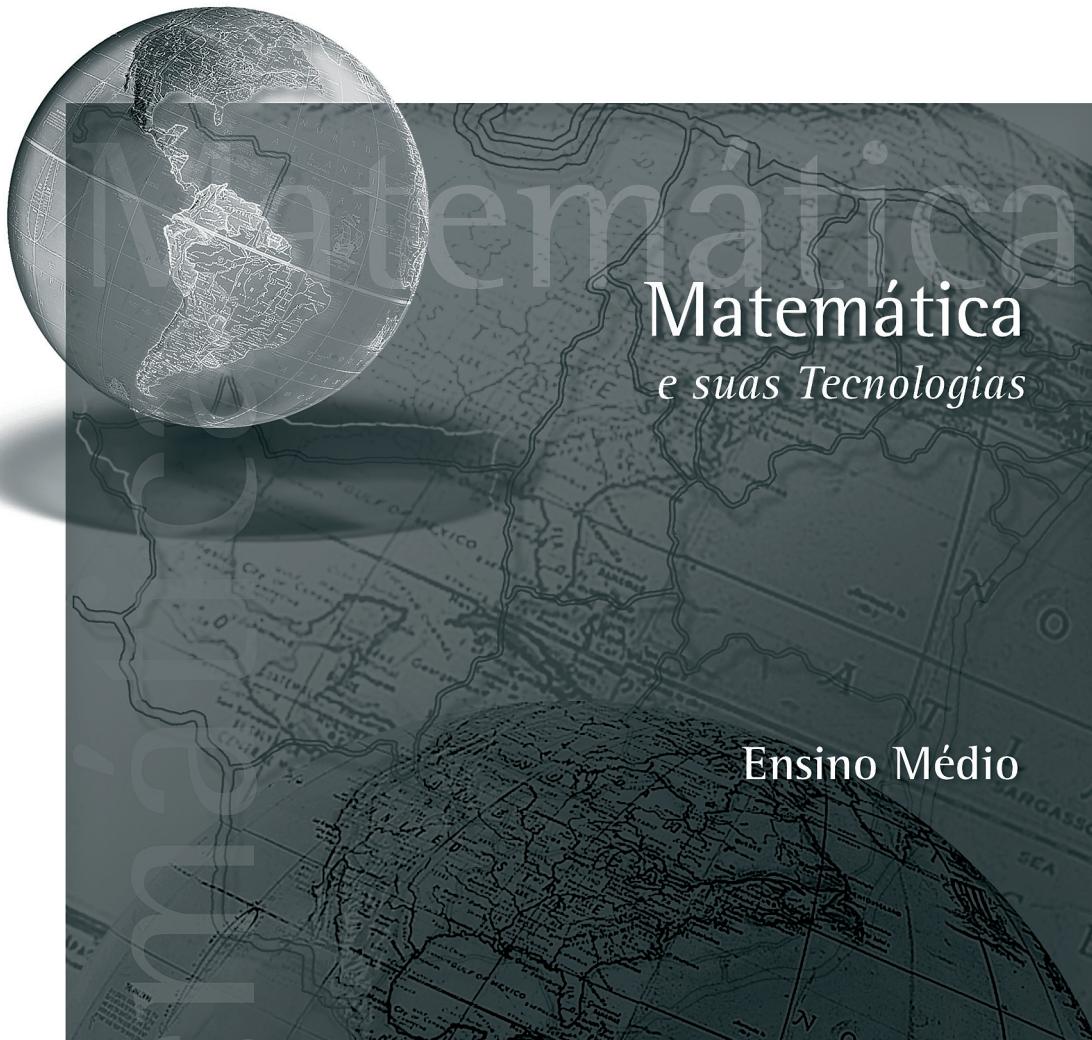
15 *Tabela de juros simples:*

Mês	Montante no início de cada mês	Juro do mês	Montante no final de cada mês
4º	2.060	1% de 2.000 = 20	2.080
5º	2.080	1% de 2.000 = 20	2.100

16 *Tabela de juros compostos:*

Mês	Montante no início de cada mês	Juro do mês	Montante no final de cada mês
4º	2.060,60	1% de 2.060,60 = 20,60	2.081,20
5º	2.081,21	1% de 2.081,21 = 20,81	2.102,02

17 *17.1. R$ 63,00.* *17.2. Resposta: (d).* *17.3. Ao final do 6º mês, conforme a tabela abaixo.*

Mês	Montante no início de cada mês	Juro do mês	Montante no final de cada mês
4º	602,47 + 62,20 = 664,67	1% de 664,67 = 6,64	664,67 + 6,64 = 671,32
5º	674,32 + 62,20 = 733,52	1% de 733,52 = 7,33	733,52 + 7,33 = 740,85
6º	740,85 + 62,20 = 803,05	1% de 803,05 = 8,03	803,05 + 8,03 = 811,08

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar grandezas direta e inversamente proporcionais e interpretar a notação usual de porcentagem.
- Identificar e avaliar a variação de grandezas para explicar fenômenos naturais, processos socioeconômicos e da produção tecnológica.
- Resolver problemas envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais e porcentagem.
- Identificar e interpretar variações percentuais de variável socioeconômica ou técnico-científica como importante recurso para a construção de argumentação consistente.
- Recorrer a cálculos com porcentagem e relações entre grandezas proporcionais para avaliar a adequação de propostas e intervenção na realidade.

Capítulo VII

A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS FATOS

APLICAR EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA MODELAR E RESOLVER PROBLEMAS, ENVOLVENDO VARIÁVEIS SOCIOECONÔMICAS OU TÉCNICO-CIENTÍFICAS.

Wilson Roberto Rodrigues

Capítulo VII

A Matemática por trás dos fatos

A matemática que não vemos

Todos os dias realizamos um grande número de operações matemáticas. Na maioria das vezes nem nos damos conta disso, mas nem sempre foi assim.

Se hoje temos muitos recursos matemáticos à nossa disposição é porque eles foram construídos, passo a passo, através dos tempos.

Cada um dos conhecimentos descobertos, em seu momento, permitiu que o homem subisse um degrau em direção ao estágio de desenvolvimento em que vivemos hoje.

Dois fatores foram essenciais nessa busca por parte do homem: a **necessidade** e a **curiosidade**. E é desses mesmos dois fatores que vamos nos valer nesse capítulo.

Queremos que você desperte seu olhar curioso sobre os temas apresentados e veja neles algo que explique e amplie sua visão sobre coisas simples do dia-a-dia.

Em algumas situações, você poderá achar tudo muito óbvio, mas não perca a paciência nem pule etapas. Cada novo passo dado irá enriquecer sua bagagem de conhecimentos matemáticos.

Esperamos que esses conhecimentos possam torná-lo mais autônomo e apto a interpretar de maneira mais precisa e crítica as coisas do dia-a-dia.

Matemática no café da manhã

Isso mesmo! É comum começarmos a lidar com a matemática desde que acordamos. Vamos ver?

Comprando os pãezinhos pela manhã, podemos encontrar uma tabela como essa pregada no caixa da padaria.

PADARIA BELO PÃO
Pão Francês

Quantidade	*Preço(R$)*
1	0,18
2	0,36
3	0,54
4	0,72
5	0,90
6	1,08
7	1,26
8	1,44
9	1,62
10	1,80
11	1,98
12	2,16
13	2,34
14	2,52
15	2,70

Tabela 1

Você já viu isso alguma vez? Ela permite que o caixa economize tempo na hora de saber o preço dos pães.

Vamos pensar um pouquinho nessa tabela e nas possíveis maneiras de usá-la e construí-la.

Resolvendo Problemas

Caso um cliente desejasse comprar 17 pãezinhos, seria necessário calcular o preço, pois ele não consta da tabela. É possível que nessa hora sejam trocadas as seguintes palavras entre o caixa e o cliente:

Pensando em voz alta, o caixa diz:

2,70 + 0,36 = 3,06

O cliente, por sua vez, responde:

De fato, 17 . 0,18 = 3,06.

Esse diálogo traduz dois raciocínios, que revelam duas maneiras diferentes de chegar à mesma conclusão. Pense um pouquinho e explique como pensou cada um para chegar ao valor dos 17 pães.

A) E você, como faria essa conta? Encontre outras maneiras de chegar a esse resultado.

Vamos pensar um pouco na construção da tabela da padaria. Poderíamos pensar, por exemplo, assim:

0,18 = 0,18 . 1

0,36 = 0,18 . 2

0,54 = 0,18 . 3

0,72 = 0,18 . 4

....

O preço a ser pago pelo cliente é igual ao preço de um pão, multiplicado pelo número de pães comprados.

A frase que está no quadro deixa bem clara qual é a lei matemática que relaciona o número de pães com o preço desses pães.

Será que não existe um jeito de dizer isso com símbolos matemáticos?

Existe! Basta chamarmos de **P** o preço a ser pago e de **n** o número de pães comprados. P(**n**) será o preço a ser pago por n pãezinhos. A expressão será:

$$P(n) = 0{,}18 \cdot n$$

Estamos dizendo a mesma coisa, agora na "língua" da Matemática.

Podemos até dizer que "descobrimos" a lei matemática ou o **modelo matemático** que está por trás desse fato. Vamos usá-lo agora.

B) Substitua n por 25 na expressão que encontramos. A expressão ficará P(25) = 0,18 . 25. Faça essa conta! O caixa da padaria faria essa conta para descobrir o quê?

Vamos explorar mais um pouco a expressão matemática do preço dos pães. Se substituirmos P por 0,72, a expressão ficará 0,72 = 0,18 . n.

Para resolvê-la, devemos fazer $n = \dfrac{0{,}72}{0{,}18}$.

C) Faça a conta! O resultado fornecerá o número de pães que podem ser comprados com R$ 0,72.

a) Você poderia calcular o preço de 15 pães mais o preço de 2 pães, ou o preço de 1 pão multiplicado por 15.
b) P = 4,50. O caixa faria este cálculo para obter o preço de 25 pães.
c) 4 pães.

Desenvolvendo competências

1

1. Agora é sua vez. Utilize as idéias que desenvolvemos para auxiliar um cliente que deseja comprar 20 pães e tem R$ 3,20. Será que o dinheiro é suficiente? Se não for, quantos pães ele poderia comprar? Se o dinheiro dele não for suficiente e você fosse aquele amigo certo, na hora certa, quanto teria que emprestar a ele para que pudesse comprar os 20 pães?

Coisas do comércio! A cem metros de nossa padaria foi inaugurada uma outra, e os moradores das redondezas agora têm duas opções para comprar seu pãozinho matinal. Para manter sua clientela, o proprietário da padaria Belo Pão tratou de baixar seus custos, diminuindo o desperdício e conseguindo desconto na compra das matérias-primas. Reduziu também sua margem de lucro e mandou fazer um belo cartaz.

PROMOÇÃO!!!
Pão Francês
R$ 0,15

2. Será necessário obtermos um novo modelo matemático para essa nova situação. Compare as duas situações e verifique o que mudou com a redução de preço. Escolha o modelo correto dentre as alternativas propostas:

a) $n=0,15\ P(n)$ b) $P(n)=0,15n$ c) $P(n)=0,15+n$ d) $n=0,15+P(n)$

3. Se você conhecer a lei matemática que modela a nova situação, poderá utilizá-la para descobrir, por exemplo, quanto custariam 17 pães no novo preço. Calcule também quantos pães poderiam ser comprados com R$1,95.

4. Aquele cliente que tem R$3,20 e quer comprar 20 pães, agora conseguiria comprar todos os pães que deseja?

5. Vamos fazer agora um uso um pouco mais sofisticado dessas idéias. Pense na seguinte situação:

Uma senhora que costumava comprar uma certa quantidade de pães todos os dias, pode, após a redução do preço, comprar um pão a mais, gastando a mesma quantia. Como fazer para descobrir quantos pães ela costumava comprar?

Vamos resolver essa situação juntos:

- *Escreva a expressão que corresponde ao valor pago por n pães no preço antigo.*
- *O valor pago por n+1 pães no preço novo é $P(n+1) = 0,15\ (n+1)$.*
- *Como o preço é o mesmo, as duas expressões são iguais.*

Assim, podemos escrever: $0,18 \cdot n = 0,15\ (n+1)$

Para resolver essa equação é preciso tirar os parênteses do segundo membro: $0,18 \cdot n = 0,15n + 0,15$

Resolva a equação e assinale o valor de n:

a) 3. b) 5. c) 7. d) 9.

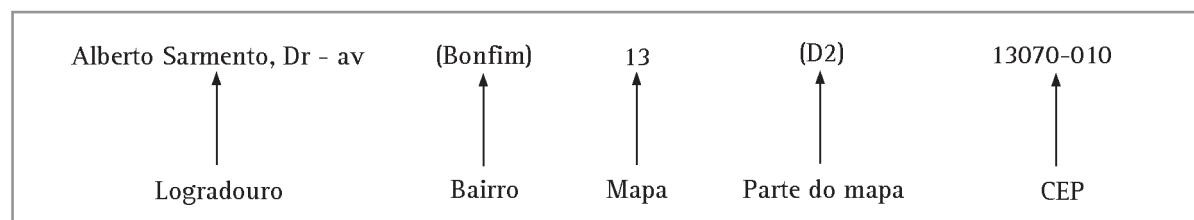
6. A resposta obtida no problema anterior corresponde ao número de pães que a senhora comprava antes ou depois da redução do preço?

Quase todos os problemas apresentados até agora poderiam ser resolvidos sem formalização. Na verdade, eles serviram apenas como ponto de partida para apresentarmos de forma simples o conceito de modelo matemático. Ao longo do capítulo você verá como essa idéia é importante!

Matemática ao sair de casa

Onde fica a Rua dos Bandeirantes?

É muito comum nas grandes cidades precisarmos de auxílio para descobrir a localização de uma rua.

Felizmente os catálogos telefônicos dessas cidades dispõem de mapas que nos ajudam a resolver esse problema.

Os catálogos têm um índice em que os nomes das ruas aparecem em ordem alfabética, como este da Figura 1, da cidade de Campinas, no Estado de São Paulo.

LOGRADOUROS • LOGRAD

Logradouro	Mapa	Parte	CEP
Balsamo - r (Jd Pres Wenceslau)	15	(B2)	13093-110
Bambui - r (Prq Univ Viracopos)	37	(B2)	13056-438
Bananal - r (Jd Proença)	20	(C2)	13026-150
Bandeira - pça (Centro)	20	(B1)	13015-340
Bandeirantes - r (Cambui)	14	(C3)	13024-010
Bandeirantes - rodv (Dis Industrial)	41	(C3)	13054-800
Barata Ribeiro - r (Vl Itapura)	14	(D1)	13023-030
Bárbara Dóeste, Sta - r (Jd N Campos Eliseos)	28	(D2)	13050-542
Bárbara do Rio Pardo, Sta - av (Jd Nova Europa)	34	(B4)	13040-230
Barbosa de Andrade - r (Jd Chapadão)	13	(C3)	13073-410
Barbosa de Barros, Dr - r (Jd Botafogo)	13	(D2)	13020-360
Barbosa da Cunha, Dr - r (Jd Guanabara)	13	(B4)	13073-320
Barnabé, S - r (Vl Pe Anchieta)	8	(D1)	13111-790

Figura 1

No início do catálogo, foi colocado o exemplo abaixo, para mostrar o que significam esses códigos:

Procure no índice a Praça da Bandeira. Verifique em que mapa ela se encontra. Procure também a Rua dos Bandeirantes.

A Figura 2 reproduz o mapa 14 do catálogo de Campinas. A indicação C3 para achar a Rua dos Bandeirantes pode ser usada da seguinte maneira:

- Aponte o dedo indicador para a letra C, na borda direita do mapa.
- Percorra com o dedo na horizontal até a altura do número 3, na linha de números na parte inferior do mapa.

A rua dos Bandeirantes deve estar por perto. Confira!

Volte ao índice e procure os dados da Rua Barata Ribeiro. Procure-a no mapa. Você concorda que é um processo eficiente para se localizar ruas em mapas?

Vamos concentrar nossa atenção agora na região C3 do mapa 14. Além da Rua dos Bandeirantes, indique mais três ruas que se encontram nessa região.

Figura 2 – *Lista Telefônica Listel*. Campinas. 2001-2002.

O sistema de identificar regiões que estamos usando é útil quando queremos encontrar uma rua ou uma praça num mapa, pois conduz nosso olhar para uma pequena região do mapa e nessa região encontramos o local procurado.

Às vezes, porém, precisamos de um critério mais preciso, em que cada ponto tenha um "endereço" próprio.

Usando a mesma idéia de localização, vamos construir uma nova maneira de identificar pontos:

Observe o mapa abaixo. As linhas de números e de letras usadas pelo catálogo telefônico foram trocadas por duas linhas numeradas, que chamamos de eixos x e y.

Para identificar um ponto, utilizaremos o mesmo processo de "cruzar" duas direções, agora com linhas.

Encontre o ponto A no mapa. De onde partem as linhas tracejadas que se cruzam em A?

Os valores de x e y de onde partem essas linhas definem o ponto A. Por convenção, escrevemos sempre primeiro o valor de x.

Assim, o ponto A será representado pelo par de números (3, 4). Esse par de números é conhecido como "coordenadas cartesianas" do ponto A.

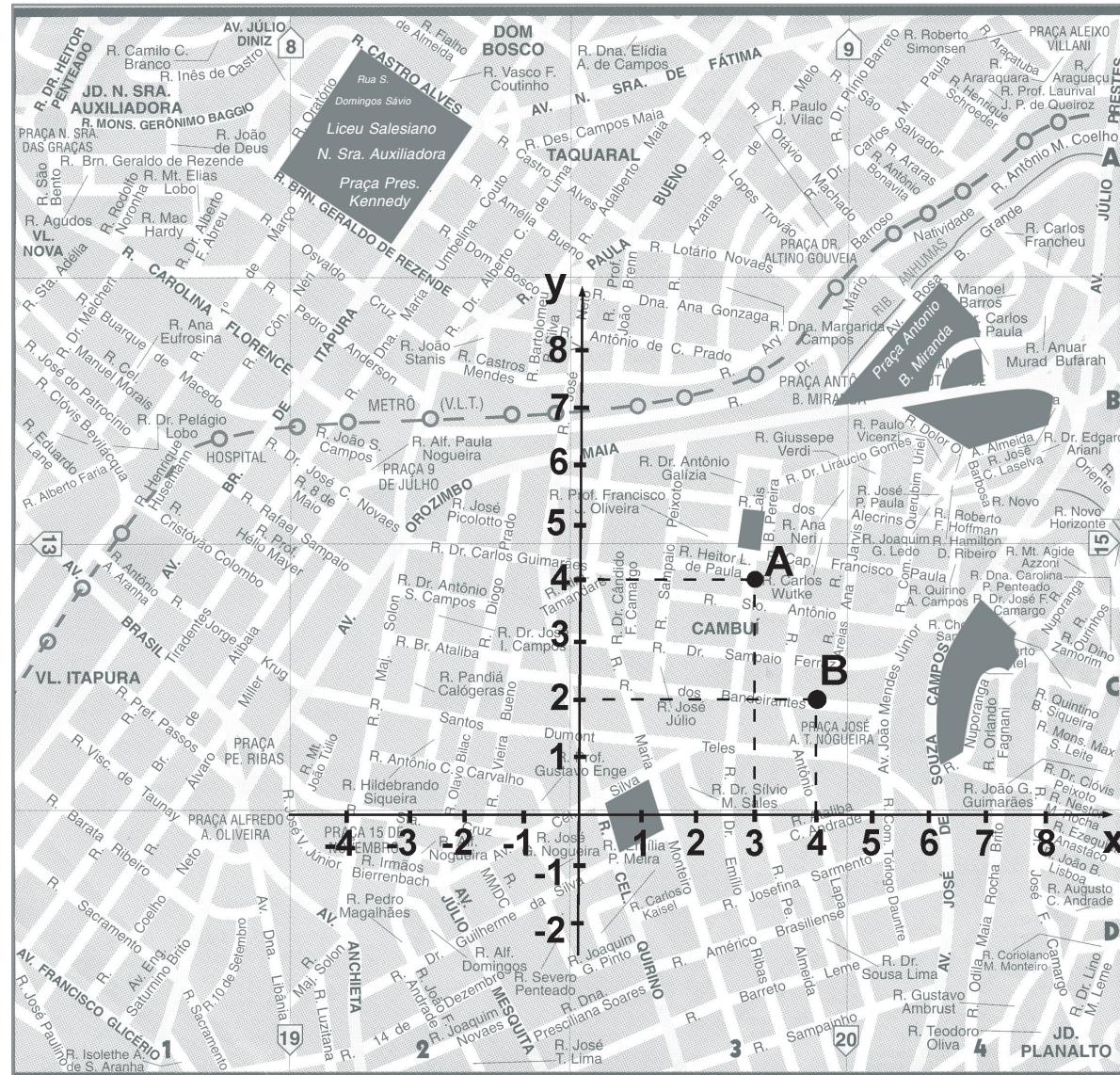



Figura 3 – Adaptado de *Lista Telefônica Listel*. Campinas. 2001-2002.

O método de representar pontos por coordenadas cartesianas consiste em dividir o plano em dois eixos, chamados eixos coordenados, e identificar os pontos do plano por dois números, que indicam respectivamente as distâncias desses pontos aos eixos coordenados (veja a figura 4).

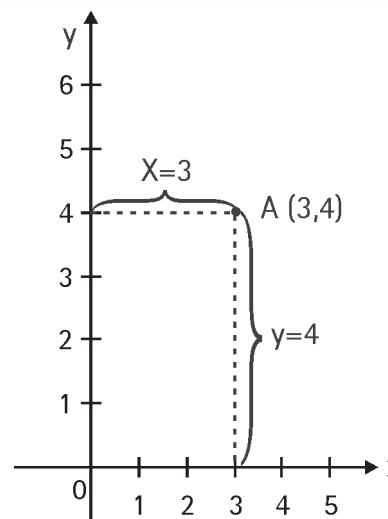



Figura 4

2 Desenvolvendo competências

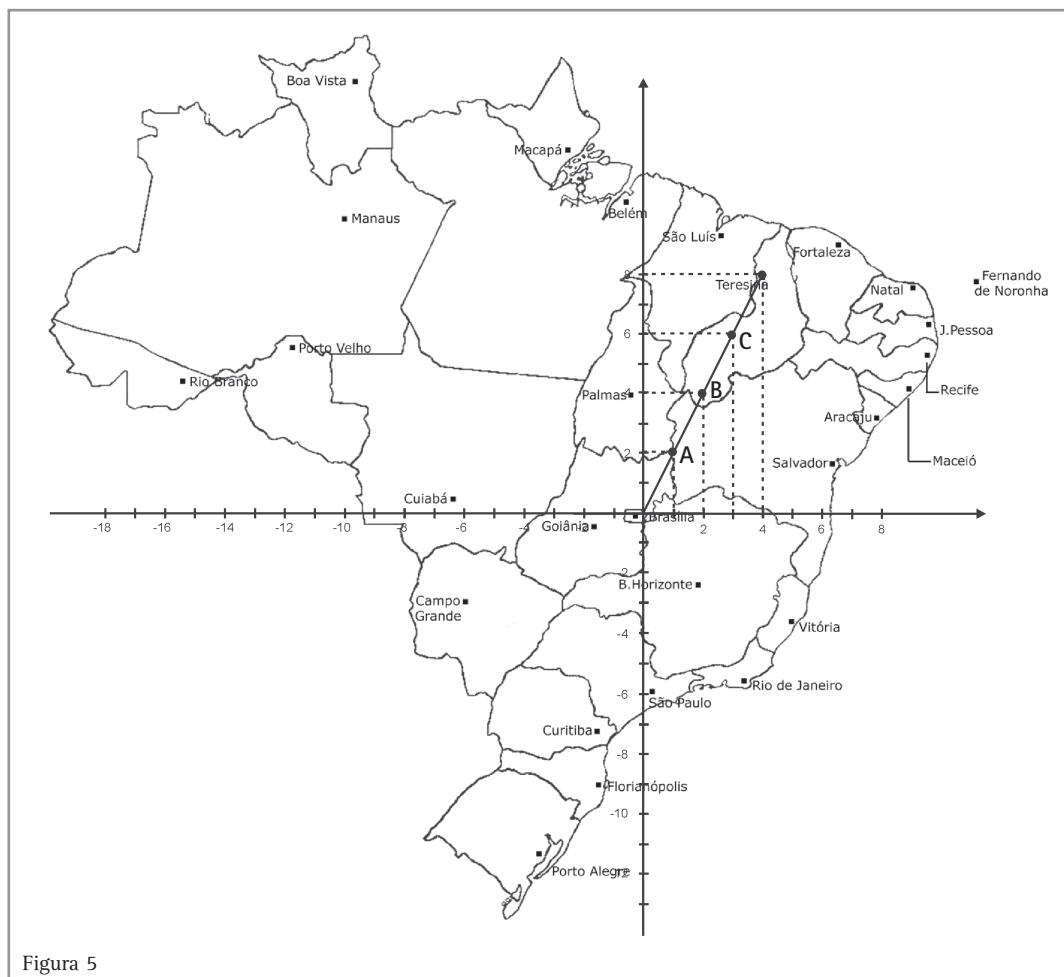
1. Agora é com você. Observe que, pelo processo do catálogo, os pontos A e B eram ambos designados por C3. Descubra as coordenadas de B, segundo o sistema de eixos da figura 3.
2. Nesse novo método de representação, é possível que dois pontos diferentes tenham as mesmas coordenadas?

3. "Passeie" um pouco mais pelo mapa. Você vai precisar de uma régua. Verifique se o ponto (6, 8) está numa área de edifícios ou numa área verde (cor cinza no mapa).

4. Qual desses pontos está na Rua dos Bandeirantes?

(a) (2, 3) *(b) (3, 2)* *(c) (1, 3)* *(d) (3, 1)*

APRENDENDO COM A HISTÓRIA

A idéia de identificar os pontos do plano através de suas distâncias, em relação a retas de referência, aparece pela primeira vez na obra de Apolônio de Perga, por volta de 300 a 200 a.C., com o estudo das secções cônicas.
Seu uso, porém, só se intensifica e se sistematiza cerca de 1800 anos depois, com as idéias do filósofo e matemático francês René Descartes (1596 – 1650).
A filosofia de Descartes, exposta em sua obra-prima "O Discurso do Método" (1637), define uma clara e precisa lógica da idéia, baseada na dedução, que parte do simples para o complexo e teve influência fundamental na formação do pensamento científico moderno.
Embora Descartes não tenha proposto explicitamente o sistema de coordenadas retangulares, este é considerado fruto da sistematização de suas idéias pelos matemáticos que o sucederam. Por isso, o nome "gráfico cartesiano" dado aos gráficos construídos dessa forma homenageia esse grande filósofo e matemático.

Viajando com as coordenadas

Afinal, existe alguma relação entre o problema da padaria e o problema do mapa?

Vamos “viajar” um pouco pelo Brasil enquanto pensamos nisso.

Observe o mapa abaixo:

Figura 5

Resolvendo problemas

A) Vamos partir de Brasília, em linha reta para Teresina. Siga pelo mapa. O caminho passa pelos pontos A, B e C. As coordenadas desses pontos estão na Tabela 2. Complete a Tabela.

Cidade	*Coordenada x*	*Coordenada y*
Brasília	0	0
Ponto A	1	
Ponto B		4
Ponto C	3	
Teresina	4	8

Tabela 2

A) Completando a tabela: A(1,2) ; B (2,4) ; C (3,6)

Desenvolvendo competências

3

1. Procure uma relação entre os valores de x e y de cada ponto assinalado na linha Brasília-Teresina. Qual das alternativas abaixo responde a essa pergunta?

a) Em todos os pontos assinalados o valor de x é o dobro do valor de y.

b) Em todos os pontos assinalados o valor de y é a metade do valor de x.

c) Em todos os pontos assinalados o valor de y é o dobro do valor de x.

d) Em todos os pontos assinalados o valor de y é igual ao valor de x.

Da mesma forma que no problema da padaria, podemos obter uma lei matemática que relaciona os valores de y e x dos pontos dessa reta.

> *A expressão é $y = 2x$*

2. Viaje você agora! Será necessário usar uma régua e um esquadro.

Siga a direção da reta $y = 0,5\ x$. Você deverá chegar ao mar em um ponto:

a) entre Salvador e Aracaju.

b) entre Aracaju e Maceió.

c) entre Maceió e Recife.

d) entre Recife e João Pessoa.

> *Para obter um ponto de uma reta, escolha um valor qualquer para x e calcule o valor de y desse ponto através da lei matemática.*
>
> *Exemplo: Se $x = 4$, $y = 0,5\ .4 = 2$*
> *Logo, o ponto (2, 4) está nessa reta.*

> *Os sistemas de coordenadas cartesianas só podem ser usados para mapas com distâncias relativamente pequenas, pois eles consideram uma superfície plana. A superfície da Terra, como sabemos, é esférica. Por isso, em grandes distâncias, usam-se as coordenadas geográficas (latitude e longitude), em que as coordenadas não são distâncias em relação a eixos, mas ângulos medidos a partir do centro da Terra.*

Tabela, gráfico ou lei matemática?

Se você observou bem, deve ter notado que as tabelas, os gráficos e as leis matemáticas são maneiras equivalentes de representarmos matematicamente um mesmo fato ou situação. Em alguns casos pode ser mais conveniente usarmos uma tabela; em outros, um gráfico ou mesmo a lei matemática, porém é sempre possível do ponto de vista matemático substituir um pelo outro.

Às vezes eles são tão equivalentes que a escolha entre usar o gráfico, a tabela ou a lei matemática é definida apenas por nossa preferência pessoal.

Vamos procurar mais semelhanças. Observe as Figuras 6 e 7.

NA PADARIA	
N	*P (R$)*
1	0,18
2	0,36
3	0,54
4	0,72
5	0,90

Tabela 3

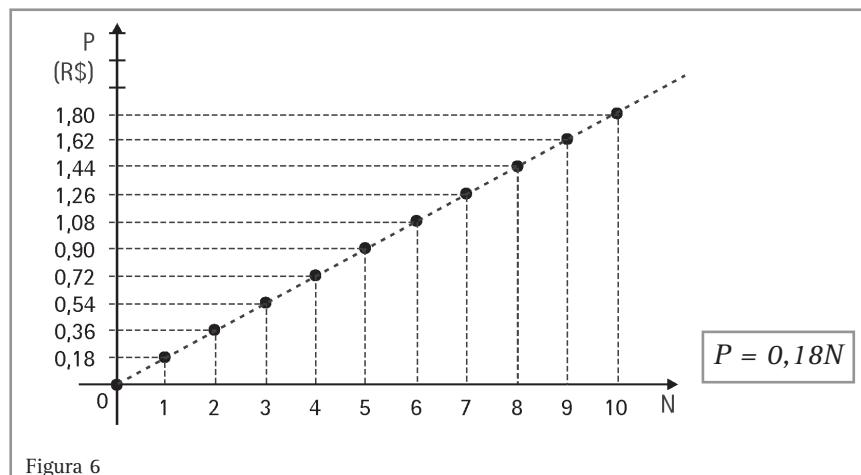



Figura 6

NO MAPA	
x	*y*
1	2
2	4
3	6
4	8

Tabela 4

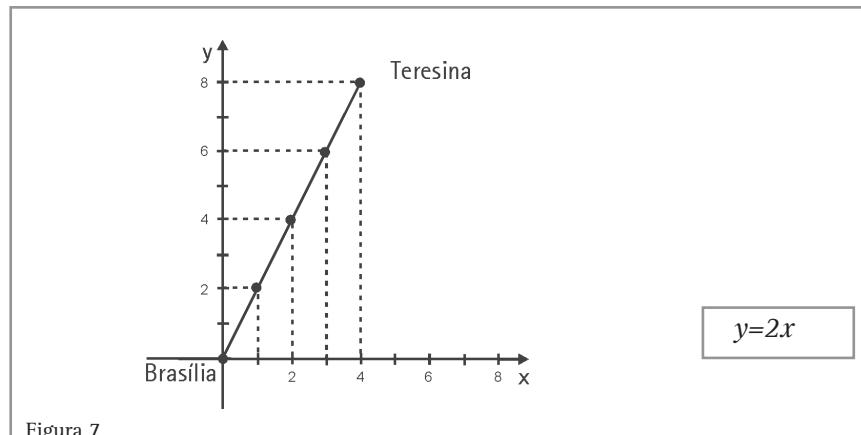



Figura 7

Note que, tanto no caso da padaria quanto no mapa, os gráficos são formados por pontos alinhados segundo uma reta que passa por (0, 0). No caso dos pães, o gráfico é representado apenas por pontos correspondentes a números inteiros, porque refere-se à compra de pães inteiros e, desse modo, não unimos os pontos como fizemos no caso do mapa.

Quando se trata de medidas, não usamos apenas números inteiros, podemos usar qualquer número real e, desse modo, podemos unir os pontos do gráfico, que, nesse caso, formam uma reta.

E as leis matemáticas? Que semelhanças apresentam?

Observe o padrão:

Na padaria, para relacionar o número de pães ao preço, multiplicamos o número de pães por um valor fixo.

No mapa, para obtermos a coordenada y de um ponto, multiplicamos a coordenada x por um valor fixo.

Podemos dizer então que, nos dois casos, duas grandezas se relacionam por expressões do tipo $y = k \cdot x$, sendo k um valor fixo e x e y variáveis.

> *Resumindo: Fatos ou situações muito diferentes podem ser representados por ferramentas matemáticas muito parecidas!*
> *Vamos tirar proveito dessa possibilidade.*

Resolvendo problemas

Pense e responda:

1. Se quisermos pesquisar valores numéricos para utilizar em outros cálculos, o que é melhor, o gráfico ou a tabela?
2. Se quisermos observar se um determinado fenômeno aumentou ou diminuiu de valor ao longo do tempo, o que permite que se veja melhor esse comportamento, o gráfico ou a tabela?
3. O caixa da padaria provavelmente vai preferir o gráfico ou a tabela? E o redator de um jornal, se quiser noticiar as variações da Bolsa de Valores?

Desenvolvendo a capacidade de buscar essa lei matemática que está "escondida" nos gráficos, fatos ou tabelas, você será capaz de enxergar além do que as tabelas ou gráficos mostram e terá maior capacidade de fazer afirmações, argumentar e tirar conclusões que vão além da simples leitura dos dados.

Este é o grande objetivo desse capítulo.

Em busca das leis matemáticas

Dá para desprezar dois centavos?

O preço da energia consumida por uma lâmpada comum de 100 Watts de potência é aproximadamente R$ 0,02 (dois centavos) por hora.

Vamos usar essa informação para refletir sobre o significado de pequenos gestos que podemos fazer no dia-a-dia.

Essa informação pode ser "traduzida" para a linguagem simbólica, como fizemos no caso da padaria. Faça isso, chamando de P o preço da energia e de t o tempo em horas que a lâmpada permanecer acesa.

De posse do modelo matemático $P(t) = 0{,}02t$ (Foi esse mesmo que você encontrou?), você pode calcular o custo da energia consumida por uma lâmpada acesa por 5 horas. Se a lâmpada ficar acesa 5 horas por dia, qual seu custo mensal? (Admita que um mês tem 30 dias).

Resolvendo problemas

1. Repita agora o mesmo problema, imaginando que a lâmpada ficará acesa apenas 4 horas por dia. Qual será o novo custo? E a economia, será de quanto?

É razoável imaginarmos que uma casa tenha dez lâmpadas desse tipo e que existam 40 milhões de casas no Brasil.

Faça as contas! Esse pequeno gesto de economia representa quanto em reais?

Este resultado é uma constatação de que a participação de cada um, por menor que seja, pode fazer diferença!

Tabela, gráfico ou lei matemática?
1. Para retirar um dado numérico é melhor usar uma tabela.
2. Para observar o fenômeno é melhor o gráfico.
3. Resposta pessoal.
Em busca das leis matemáticas
1. A economia de uma hora representa R$ 240.000.000,00

Desenvolvendo competências

4

Leia este problema

Uma locadora de automóveis adota o seguinte critério para calcular o valor a ser cobrado pelo aluguel de seus carros:

- *Uma taxa fixa de R$ 30,00, independente de quantos quilômetros foram rodados.*
- *Uma taxa variável de R$ 1,20 por quilômetro rodado.*

> *Este valor inicial de R$ 30,00 é novidade. O que vai mudar na lei matemática?*

Resolvendo passo a passo

Para descobrir a lei matemática que descreve esse fato, procure responder às seguintes perguntas:

Quanto custaria usar um carro por 1 quilômetro? E por 2 quilômetros? E por 3 quilômetros? Que cálculos você fez para obter essas respostas?

Pense em cada um dos procedimentos que você fez e tente criar uma regra para calcular o valor do aluguel para n quilômetros.

Essa resposta deverá levá-lo à lei matemática $P(n) = 30 + 1{,}2 \cdot n$, sendo P o preço da locação em reais e n o número de quilômetros rodados.

Dispondo dessa lei, você poderá responder às questões seguintes. Mãos à obra!

a) Um cliente que tenha rodado 135 km numa locação, deverá pagar quanto de aluguel?

b) Quantos quilômetros um cliente pode rodar no máximo, se ele dispõe de R$ 120,00 para pagar o aluguel?

Dê sua opinião. O que seria melhor? Afixar na locadora uma tabela com o valor a ser pago de acordo com os quilômetros rodados, ou um gráfico que contivesse as mesmas informações da tabela?

Quanto tempo esperar?

Uma caixa d'água com volume de 12.000 litros, cheia, deverá ser esvaziada por uma tubulação que permite uma vazão constante de 50 litros por minuto.

Desejamos saber o volume que ainda resta na caixa após alguns minutos do início da operação.

Alguns raciocínios simples permitirão que você responda às seguintes questões. Tente!

a) Quantos litros de água restam na caixa um minuto após o início da operação? E dois minutos? E três minutos?

Resolva também estes casos:

b) Qual a quantidade de água escoada em 10 minutos? Quantos litros restam na caixa após 10 minutos?

c) Qual a quantidade de água escoada em 15 minutos? Quantos litros restam na caixa após 15 minutos?

d) Pense nos cálculos que foram feitos para responder a essas duas questões. A partir deles é possível obter uma regra geral para o número de litros que restam na caixa após n minutos.

Essa é a lei matemática que descreve esse problema. Escreva-a!

Locadora de Automóveis

a) R$ 192,00

b) 75 km

Caixa d'água:

a) 11.950l, 11.900l, 11.850l

b) 500l, 11.500l

c) 750l, 11.250l

d) $V(t)=12.000-50t$

Com a lei matemática você poderá responder a outras questões que não seriam tão facilmente respondidas com os procedimentos usados no início do problema. Use a lei obtida para respondê-las:

e) Cinco horas após o início do esvaziamento, a caixa já estará vazia? Esse resultado lhe causou alguma surpresa? Como interpretá-lo?

f) Quanto tempo passará até que o volume de água na caixa seja 5.000 litros?

g) Por fim, você já percebeu qual a expressão que deverá ser resolvida para sabermos qual o tempo mínimo necessário para o escoamento de toda a água? Use-a para assinalar a alternativa correta:

a) 2 horas.

b) 4 horas.

c) 6 horas.

d) 8 horas.

O modelo é por sua conta!

Nos próximos problemas o modelo matemático será por sua conta. Vamos começar por um tema que pode lhe interessar.

Analisando propostas de emprego

Um candidato a um emprego de vendedor de assinaturas de um certo jornal, ao ser admitido, recebeu duas propostas de cálculo para seu salário mensal:

Proposta 1 – Um salário fixo de R$ 180,00, mais uma comissão de R$ 2,00 por assinatura vendida.

Proposta 2 – Um salário fixo de R$ 400,00, mais uma comissão de R$ 0,90 por assinatura vendida.

Observe bem as duas propostas. Alguém que venda poucas assinaturas por mês deve optar por qual proposta?

Mas será que existe um número de assinaturas vendidas que define qual proposta é melhor?

Quem souber calcular esse número certamente fará uma escolha mais segura.

Vamos procurar conhecer cada uma das propostas por suas leis matemáticas.

Se você chamar o salário de S e o número de assinaturas vendidas de n, poderá obter as leis matemáticas que descrevem essas propostas. Observe que o salário depende do número de assinaturas e, por isso, a lei deve ser expressa por S(n).

Resolvendo problemas

a) Compare as leis que você encontrou com as alternativas abaixo. Só uma alternativa é correta e as leis descrevem as propostas 1 e 2, nessa ordem.

   a) $S(n) = 180 + 0{,}9n$ e $S(n) = 400 + 2n$

   b) $S(n) = 180 + 2n$ e $S(n) = 400 + 0{,}90n$

   c) $S(n) = 400 + 9n$ e $S(n) = 180 + 2n$

   d) $S(n) = 180 + 2n$ e $S(n) = 400 + 2n$

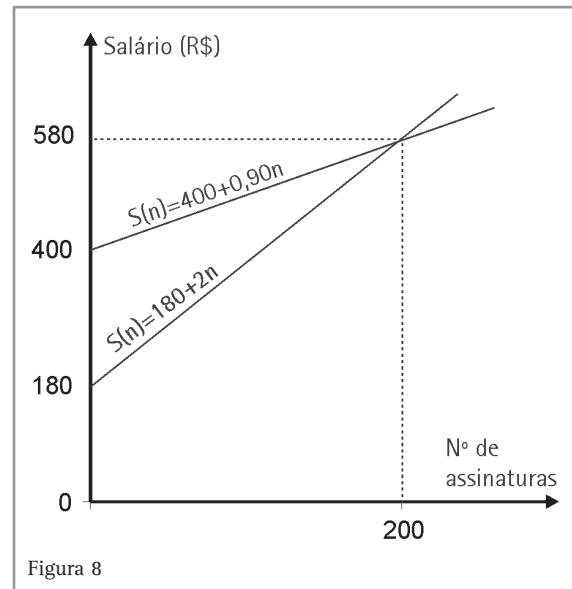
b) Coloque-se no lugar do candidato. Se você achar que consegue vender 120 assinaturas por mês, qual proposta deverá aceitar? Nesse caso, quanto ganhará a mais por ter tomado a decisão correta?

c) Afinal, a partir de quantas assinaturas vendidas é melhor a proposta 1? Você precisará descobrir o valor de n que resolve a equação.

$$180 + 2n = 400 + 0{,}90n$$

Descobrir n nesta expressão é o mesmo que responder à pergunta: Qual o valor de n para o qual o salário na proposta 1 é igual ao salário na proposta 2?
Pense nisso!

e) Após 5 horas o volume será negativo. Significa que já está vazia.
f) V = 5.000 para t= 140 minutos.
g) Tempo de esvaziamento: 4 horas. Resposta: b

Proposta de emprego
a) $S(n) = 180 + 2n$ e $S(n) = 400 + 0{,}90\,n$
b) A proposta 02 - R$ 88,00 a mais
c) $n = 200$

Faça as contas! Conhecendo o valor de n obtido no item c), decida:

d) Se você pretende vender 250 assinaturas por mês, deve escolher a proposta 1 ou 2? Quanto ganhará por mês?

Este problema também poderia ser resolvido graficamente. Observe o gráfico abaixo, que corresponde à sua solução, e responda:

e) Qual o significado do cruzamento das duas retas no gráfico?

f) Esse número coincide com o valor que você obteve analiticamente?

g) Qual o salário de quem vender 200 assinaturas por mês?

Figura 8

h) Procure explicar por que a reta que representa a proposta 1 é mais inclinada que a que representa a proposta 2.

Otimizar. Questão de sobrevivência!

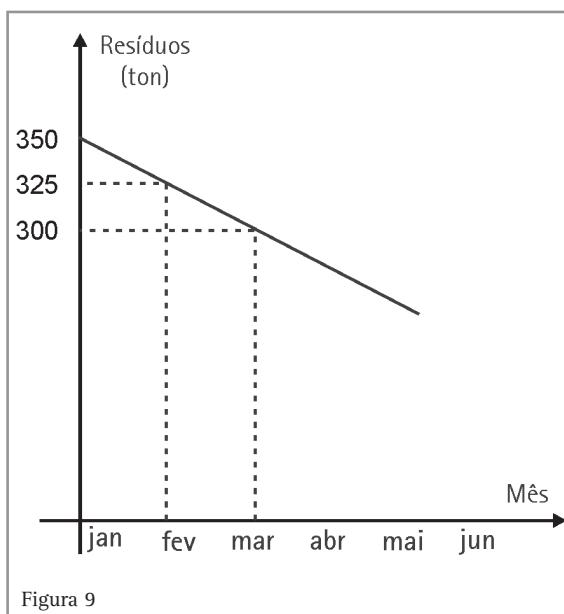
A próxima atividade será desenvolvida a partir desta leitura.

A necessidade de reduzir custos e otimizar cada detalhe da cadeia produtiva fez com que surgisse na indústria automobilística japonesa o conceito de "Produção Enxuta", que conferiu grande competitividade à produção industrial do Japão e levou a indústria ocidental a rever seus princípios para fazer frente aos poderosos concorrentes.

O conceito ocidental de Produção em Massa define um limite de aceitação em termos de número de defeitos, tamanhos definidos de estoques de matérias primas, quantidade limitada de produtos padronizados. A Produção Enxuta defende a perfeição: custos continuamente decrescentes, elevação da qualidade de modo a que os estoques e o número de defeitos tendam a zero, tudo isso associado à maior variedade possível de produtos.

No mundo globalizado e competitivo em que vivemos, otimizar é uma questão de sobrevivência!

d) Proposta 1 - R$ 680,00
e) O número de assinatura em que as duas propostas correspondem ao mesmo salário.
f) Observe, no gráfico que n=200, como na solução do item (c)
g) R$ 580,00
h) A inclinação está associada ao valor da comissão por assinatura vendida.

O custo do desperdício vai além do custo da matéria-prima não utilizada, pois os resíduos gerados trazem custos adicionais de remoção ou armazenamento, além da degradação do meio-ambiente.

Resolvendo problemas

Vamos pensar nesse problema de maneira quantitativa.

Observe o gráfico. Ele descreve o programa de redução de desperdício de uma empresa ao longo deste ano.

Você pode tirar duas informações importantes da leitura do gráfico:

a) Quantas toneladas de resíduos a empresa produziu em janeiro?

b) A quantidade dos resíduos diminui de quantas toneladas por mês?

Figura 9

Procure essas respostas!

c) Com esses dados você pode obter com facilidade a lei matemática que modela esse fato. Escreva essa lei.

De posse da lei você disporá de elementos convincentes para argumentar sobre questões do tipo:

d) Em que mês a quantidade de resíduos será 200 toneladas? (lembre-se que, em janeiro, t=0, em fevereiro, t=1, e assim sucessivamente).

e) Se a meta da empresa for chegar a dezembro com menos de 100 toneladas de resíduos, essa meta deverá ser atingida?

Faça suas contas e defenda suas idéias com segurança.

Ampliando os horizontes

A partir de agora serão propostas algumas situações em que você deverá utilizar as idéias aqui desenvolvidas para ir mais longe!

Utilize-as para prever, argumentar, analisar e criticar com base em argumentos consistentes!

Transporte-as também para os seus problemas do dia-a-dia e utilize-as para a sua interpretação do mundo.

Afinal, a Matemática é uma conquista da humanidade que está colocada ao seu dispor!

a) 350 ton em Janeiro.

b) Diminui 25 ton/mês.

c) lei: R(t) = 350 - 25t

d) Em julho (t=6)

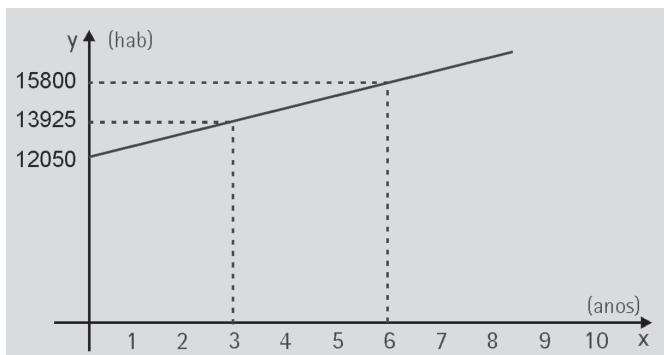
e) Em Dezembro: t=11, R(t)=75 ton.

Desenvolvendo competências

5 **Argumentando com segurança**

Leia estas duas notícias que apareceram na mesma edição do jornal da cidade de Sapiência, mas que poderiam muito bem estar no jornal da sua cidade.

EVOLUÇÃO DA POPULAÇÃO DE SAPIÊNCIA

Foi divulgado o resultado de uma pesquisa iniciada em 1996 mostrando a evolução da população da cidade Sapiência nos últimos anos.
Os indicadores econômicos da cidade fazem crer que esse crescimento se manterá nas mesmas condições nos próximos anos.

NOVA ESTAÇÃO DE TRATAMENTO DE ESGOTOS DE SAPIÊNCIA

Nossa cidade conta com uma nova estação de tratamento de esgotos, que tem capacidade para atender a uma população de 20 mil habitantes e deverá resolver o problema de tratamento de esgotos da cidade até o ano de 2015.

Figura 10

Vamos fazer uma leitura atenta dessas notícias.

a) *Olhando o gráfico, verifique qual era a população da cidade quando o estudo começou.*
O gráfico também nos traz a informação de que, três anos depois, a população passou a 13.925 habitantes.
Qual foi o aumento da população nesses 3 anos?

b) *Calcule também o aumento da população em um ano, admitindo que seja igual nos três anos.*

c) *Com esses dados você pode obter o modelo matemático desse crescimento. Faça isso!*

d) *No jornal foi dito que o estudo foi iniciado em 1996, assim $x=0$ corresponde a 1996. Qual o valor de x para 2015?*

e) *Qual deverá ser a população de Sapiência em 2015?*

f) *Após analisar os dados obtidos com seus cálculos, escreva uma pequena carta para o redator do Jornal de Sapiência com um comentário sobre a credibilidade da notícia sobre a estação de tratamento de esgotos.*

Há sempre algo a ser feito

No ambiente de consumismo desmedido em que vivemos, muitas vezes nos servimos dos confortos que a tecnologia nos oferece, sem que notemos conseqüências importantes de pequenas atitudes que podemos assumir.
Movidos pela propaganda e pelo comodismo, não nos damos conta, por exemplo, de que entre a decisão de descascar e chupar uma laranja ou abrir uma embalagem de suco industrializado existe uma diferença fundamental: enquanto o bagaço da laranja em pouco tempo estará reincorporado à natureza, a embalagem do suco poderá permanecer por séculos poluindo algum ponto da Terra.
Este problema pode ser muito diminuído com a reciclagem, mas nem ela é suficiente para nos livrar da companhia de imensos aterros sanitários, que ocupam espaços cada vez mais preciosos, custam caro e são fontes de poluição.
Da necessidade da conscientização para o consumo responsável surgiu um novo termo: PRECICLAR, que consiste em fazer a reciclagem antes da compra, *escolhendo materiais e produtos que causem o menor impacto ambiental possível.*

É comum recebermos uma grande quantidade de informações qualitativas a respeito desse tema, mas normalmente os dados quantitativos ficam restritos às discussões mais especializadas.

Vamos pensar um pouco nas 8,5 bilhões de latas de alumínio que o Brasil fabricou em 1998, das quais 5,5 bilhões por reciclagem. As latas recicladas representaram 65% das latas produzidas naquele ano e corresponderam a 82.300 toneladas de sucata. Para se ter uma idéia desse volume, basta lembrar que se fossem para um aterro sanitário, seriam necessárias 16.000 viagens de caminhões de lixo.

O grande ganho, na verdade, com a reciclagem do alumínio está na economia de energia, pois, para se obter 1 kg de alumínio por reciclagem, gasta-se apenas 5% da energia necessária para produzir esse mesmo 1kg de alumínio a partir do minério.

O gráfico e a lei matemática abaixo relacionam em valores aproximados a quantidade de energia necessária para produzir as 8,5 bilhões de latinhas e o percentual de reciclagem.

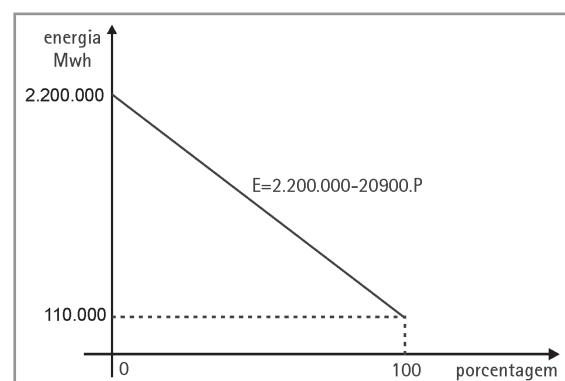



Figura 11

Para entender melhor o gráfico, verifique qual o consumo de energia se a porcentagem de alumínio reciclado for 0 (nada reciclado) ou 100 (tudo reciclado).

Com a lei matemática fornecida, descubra quantos MWh foram gastos para produzir as latinhas, sabendo que 65% delas são recicladas.

Resolvendo problemas

a) A lei matemática nos permite ir mais longe. Faça o mesmo cálculo, imaginando que a porcentagem reciclada seja de 66%, em vez de 65%.

b) Subtraia um valor do outro. Você descobrirá quantos MWh de energia são consumidos a menos se o percentual de reciclagem aumentar de 1%.

c) Para saber o que esse número representa, considere que uma família pode viver com conforto consumindo 0,3 MWh por mês. Verifique quanto tempo essa família levaria para consumir a quantidade de energia economizada por esse aumento de 1% na reciclagem.

Esse número lhe causou surpresa? Não se esqueça que ele corresponde a apenas uma diferença de 1% no total de alumínio reciclado.

Se pensarmos nos 35% do alumínio que são desperdiçados, chegaremos à conclusão de que muito pode ser feito!

Se você acha esses números convincentes, lembre-se de que um estudo semelhante também pode ser aplicado ao papel, ao plástico, ao aço, ao vidro e a muitos outros materiais que se incorporaram ao nosso cotidiano. Muitas vezes não nos damos conta das conseqüências de seu uso indiscriminado.

Pense nisso! Enumere providências que possa tomar no seu dia-a-dia e em sua comunidade, que o tornem um consumidor consciente e responsável. Se a Matemática o ajudou nessa compreensão, nosso objetivo foi atingido!

Há sempre algo a ser feito.

a) Para 65%: 841.500 MWh. Para 66%: 820.600MWh.

b) Diferença: 20.900 MWh.

c) Suficiente para aproximadamente 5.805 anos.

Conferindo seu conhecimento

1

1. O dinheiro não é suficiente. Ele poderia comprar 17 pães. Faltariam R$ 0,40.

2. P(n) = 0,15n. Resposta: (b).

3. 17 pães custariam R$2,55. Com R$1,95 poderiam ser comprados 13 pães.

4. 20 pães custam R$3,00; portanto, ele poderia comprá-los.

5. n=5. Resposta: (b).

6. Corresponde ao número de pães que ela comprava antes do aumento. Logo, ela comprava 5 pães e passou a comprar 6 pães.

2

1. (B) = (4,2).

2. Não. Dois pontos diferentes não têm coordenadas iguais.

3. Área verde (cor cinza no mapa).

4. O ponto (3, 2). Resposta: (b).

3

1. Resposta (c): y é o dobro de x.

2. Resposta (d): Entre Recife e João Pessoa.

4

Locadora: a) R$192,00 b) 75km

5

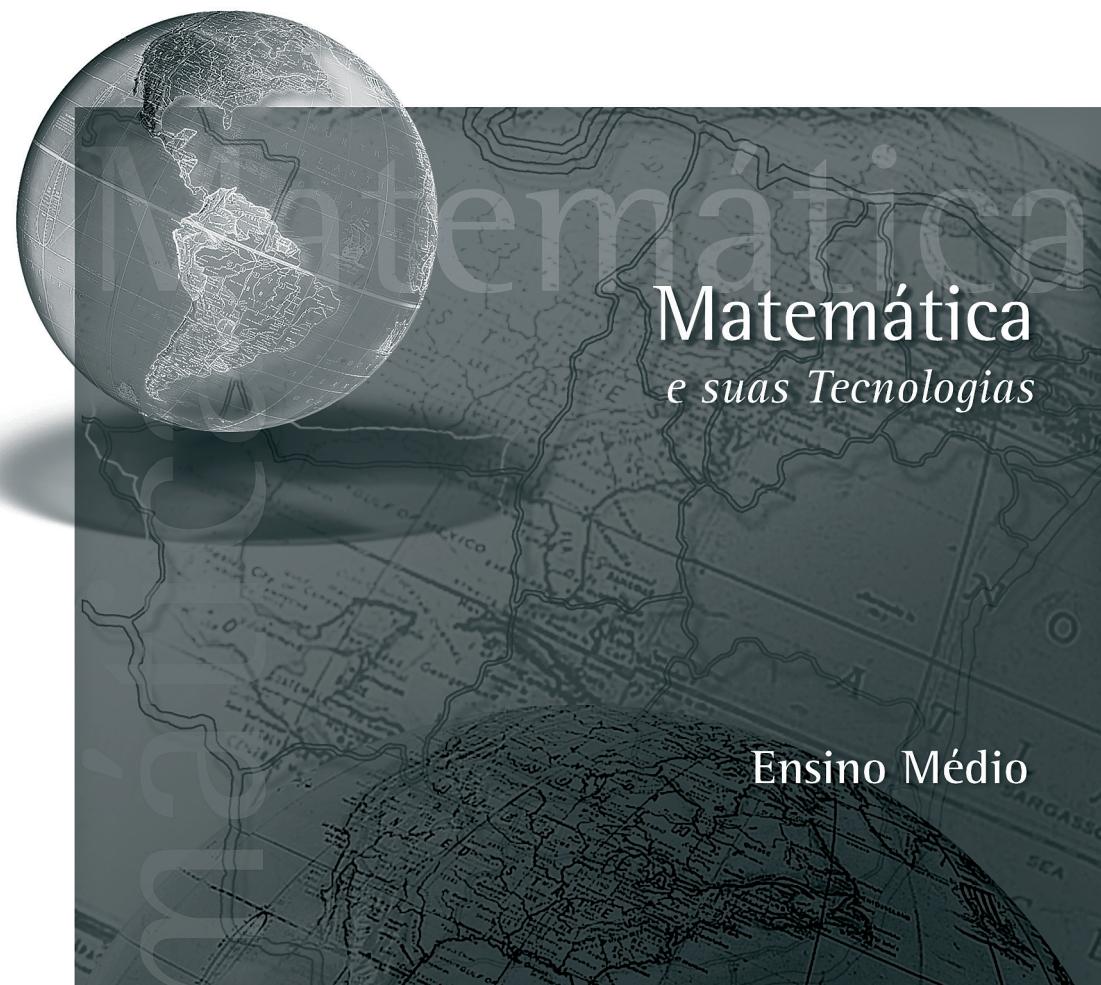
a) População no início do estudo: 12.050 habitantes. Aumento em 3 anos: 1.875 habitantes.

b) Aumento anual: 625 hab.

c) Lei matemática: P(x) = 12.050 + 625x

d) Em 2015, x = 19.

e) População em 2015: 23.925 hab.

f) Notícia falsa sobre a estação de tratamento de esgotos.

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar e interpretar representações analíticas de processos naturais ou da produção tecnológica e de figuras geométricas como pontos, retas e circunferências.
- Interpretar ou aplicar modelos analíticos, envolvendo equações algébricas, inequações ou sistemas lineares, objetivando a compreensão de fenômenos naturais ou processos de produção tecnológica.
- Modelar e resolver problemas utilizando equações e inequações com uma ou mais variáveis.
- Utilizar modelagem analítica como recurso importante na elaboração de argumentação consistente.
- Avaliar, com auxílio de ferramentas analíticas, a adequação de propostas de intervenção na realidade.

Capítulo VIII

GRÁFICOS E TABELAS DO DIA-A-DIA

INTERPRETAR INFORMAÇÕES DE NATUREZA CIENTÍFICA E SOCIAL OBTIDAS DA LEITURA DE GRÁFICOS E TABELAS, REALIZANDO PREVISÃO DE TENDÊNCIA, EXTRAPOLAÇÃO, INTERPOLAÇÃO E INTERPRETAÇÃO.

Jayme Leme

Capítulo VIII

Gráficos e tabelas do dia-a-dia

Apresentação

Caro leitor, você já reparou que gráficos e tabelas fazem parte do nosso cotidiano? Eles podem ser encontrados num supermercado, numa sorveteria, na televisão, em revistas ou em jornais, com o objetivo de passar alguma informação. Ler, interpretar ou usar gráficos e tabelas não é privilégio de pessoas que freqüentaram escolas, pois vemos, em nossas comunidades, pessoas que não tiveram uma formação escolar, mas conseguem facilmente descobrir o preço de uma carne numa tabela de um açougue, ou de um sanduíche no cardápio da lanchonete.

Se observarmos com atenção, podemos perceber que existe uma certa linguagem característica dos gráficos e tabelas. Conhecer essa linguagem é de fundamental importância para que possa haver uma boa comunicação entre os diversos segmentos de uma sociedade.

Convido os leitores a vivenciarem algumas situações apresentadas neste capítulo, para podermos juntos discutir a leitura dos gráficos e tabelas. Além disso, discutiremos também como essas informações podem nos ajudar a enfrentar os problemas que encontramos no nosso dia-a-dia.

Sugiro fazer a leitura do capítulo acompanhado de lápis e papel, pois eventualmente irei propor que se façam algumas anotações ou que se resolva algum problema.

Conhecendo os gráficos e tabelas

Talvez você já tenha visto em algum filme ou desenho animado que as paredes das pirâmides do Egito eram recobertas por desenhos e gravuras. Esses símbolos eram a escrita que os egípcios utilizavam. Em tempos mais remotos, os seres humanos primitivos faziam gravuras nas paredes das cavernas, chamadas de pinturas rupestres.

Repare que desde a pré-história o homem utiliza artifícios para a comunicação. Esta pode ser expressa por símbolos, desenhos, gravuras ou palavras. Hoje, existem dezenas de meios e formas de comunicação, sendo a fala e a escrita as mais utilizadas.

Os gráficos e tabelas são um desses meios, se destacando das demais formas de comunicação, pela possibilidade de transmitir um grande volume de informações de modo sintético e de fácil interpretação.

Normalmente, os gráficos e tabelas apresentam o cruzamento entre **dois** dados relacionados entre si. Podemos dar, como exemplos, o peso de uma criança que depende da idade, o faturamento de uma firma que depende do mês, o índice de analfabetismo que depende da região, o índice de chuva que depende da época do ano etc.

Podemos utilizar as tabelas para os mais diversos fins. Empresas de grande porte utilizam-nas para apresentar seus balanços mensais; já um balconista pode usar uma tabela para agilizar seu dia-a-dia.

A utilidade das tabelas é tão variada, que saber construir, ler e interpretá-las é de grande importância para nos auxiliar a enfrentar os problemas diários. Vamos ver como se fazem essas construções.

Desenvolvendo competências

1

Construindo tabelas

Uma tabela como esta ao lado é muito comum. Ela permite que se obtenha rapidamente quanto uma pessoa deve pagar, de acordo com a quantidade de cópias que tira em um estabelecimento que possua copiadora. Observe que alguns valores estão apagados. Calcule-os.

Nº de cópias	Valor R$
1	0,08
2	0,16
3	0,24
4	
5	0,40
6	
7	0,56
8	
9	
10	0,80

Tabela 1

Uma grande vantagem do uso de tabelas é a possibilidade de trabalhar com várias informações simultâneas; por exemplo, poderíamos aproveitar a mesma tabela para acrescentar novas informações, como o preço da plastificação de documentos.

Desenvolvendo competências

2

Calcule os valores dos espaços em branco da tabela ao lado.

Observe que tabelas semelhantes a essas podem ser encontradas em vários locais, como mercados, padarias, mercearias etc.

Depois que uma tabela estiver construída, qualquer pessoa que souber compreendê-la terá condições de retirar as informações desejadas.

Vamos ver como se faz isso.

Quantidade	Cópias	Plastificação
1	0,08	1,20
2	0,16	2,40
3	0,24	3,60
4	0,32	
5	0,40	6,00
6	0,48	7,20
7	0,56	
8	0,64	
9	0,72	
10	0,80	12,00

Tabela 2

Leitura de tabelas

Como dissemos anteriormente, as tabelas, também chamadas de quadros, apresentam os dados e cabe a nós fazermos sua leitura, para entendermos o que estão informando.

Vamos começar por um assunto de que todo brasileiro gosta e até quem não gosta nessa hora passa a gostar. Estamos falando sobre Copa do Mundo.

Você sabe que em 2002 o Brasil inteiro parou para gritar:

“PENTACAMPEÃO!”

• Verifique pela tabela a seguir a colocação do Brasil em 2002.

Ano	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	2002
Colocação do Brasil	5º	1º	1º	11º	1º	4º	3º	5º	5º	9º	1º	2º	1º

Tabela 3

O Brasil é o único país do mundo a ter o título de Pentacampeão, ou seja, já ganhou cinco vezes a Copa do Mundo. Escreva num papel os outros quatro anos em que o Brasil foi campeão.

Você pode ter conseguido achar os anos em que o Brasil foi campeão por diversas maneiras: talvez você já soubesse essas datas, ou teve que procurá-las na tabela ano a ano, localizando os anos de 58, 62, 70 e 94. Um outro modo que talvez você tenha utilizado para agilizar a busca foi o de localizar, na fileira “**Colocação do Brasil**”, as que indicavam 1º lugar, encontrando os anos citados.

Iremos chamar os procedimentos utilizados para encontrar dados numa tabela de **leitura de tabela**.

• Vamos localizar outro dado nessa tabela. Procure o ano em que o Brasil teve sua pior colocação.

Acredito que você deva ter encontrado o ano de 1966.

Vamos acrescentar agora mais dados nessa tabela para podermos fazer outras leituras.

Ano	*Colocação do Brasil*	*Local onde se realizou a Copa*	*Participantes das eliminatórias*	*País Campeão*
54	5º	Suíça	36	Alemanha
58	1º	Suécia	48	Brasil
62	1º	Chile	51	Brasil
66	11º	Inglaterra	53	Inglaterra
70	1º	México	70	Brasil
74	4º	Alemanha	92	Alemanha
78	3º	Argentina	98	Argentina
82	5º	Espanha	105	Itália
86	5º	México	113	Argentina
90	9º	Itália	105	Alemanha
94	1º	Estados Unidos	126	Brasil
98	2º	França	99	França
2002	1º	Japão/Coréia	106	Brasil

Tabela 4

Durante o capítulo, proporemos algumas perguntas para que você possa verificar se está compreendendo o texto ou não. Após as perguntas, será apresentada uma forma de resolução, para você compará-la com o que fez.

Lembre-se de que os dados são coletados a partir do cruzamento de **duas** informações.

Então vamos à pergunta:

- Em que país ocorreu a copa de 1990?

As duas informações que temos de tomar como ponto de partida são o **ano de 90** e o **local de realização da Copa.** Faça o cruzamento dessas duas informações e descubra a resposta.

Você deve ter localizado a *Itália*.

Vamos localizar outros dados a partir de outras informações. Veja:

- Quantas seleções participaram das eliminatórias na Copa realizada no Chile?

A resposta é 51. Quais informações se cruzam para fornecer essa resposta?

Neste caso, teríamos de cruzar as informações relacionadas ao **Chile** e **participantes das eliminatórias.**

Às vezes necessitamos comparar os dados para determinar qual é a informação solicitada. Veja:

- Em que ano houve mais seleções nas eliminatórias?

Ao localizar o **maior** número de participantes, encontramos o ano de 94.

Em algumas partes deste capítulo, serão apresentadas questões com o título PESQUISE, para você fazer sozinho, aplicando o que leu. As respostas a essas questões estarão à sua disposição nas últimas páginas. Sugiro que você faça as atividades no momento em que forem propostas, pois assim você testa seu conhecimento.

Desenvolvendo competências

3

PESQUISE

1. Quantas seleções participaram das eliminatórias em 1998? Qual foi a campeã?

2. Onde foi realizada a Copa de 86? Em qual colocação o Brasil ficou?

3. Qual foi o país campeão da Copa da Espanha? Em que ano isso aconteceu?

4. Em que ano foi realizada a Copa que teve menor número de participantes nas eliminatórias?

Usando as tabelas

Agora que nós já vimos como construir e ler as tabelas, vamos utilizar esse conhecimento para nos ajudar a resolver os seguintes problemas: (Utilize a Tabela 2 para resolvê-los).

• Suponha que você deseje obter uma cópia plastificada da sua carteira de identidade e da sua habilitação de motorista. Sabendo que uma papelaria cobra 2 cópias para tirar frente e verso de um único documento, quanto você irá gastar?

Veja que, para resolvermos esse problema, necessitamos interpretá-lo e também ler as informações contidas na tabela. Como o problema pede para tirar cópia de dois documentos e informa que, para cada um, temos que pagar duas cópias, pagaremos então quatro cópias. Além disso, necessitamos plastificar esses dois novos documentos. Veja na tabela quanto você pagaria por quatro cópias e duas plastificações.

Você deve ter encontrado R$ 0,32 e R$ 2,40, logo teria gasto um total de R$ 2,72.

• Suponha que você tenha perdido seu cachorro de estimação e gostaria de colocar cartazes com a foto dele e um telefone de contato. Você se dispôs a gastar R$ 10,00 para tirar cópia desses cartazes. Quantas cópias você poderá tirar?

Existem várias maneiras de resolver o problema. Uma das maneiras que talvez você tenha pensado é:

A tabela apresenta valores somente até 10 cópias que sairiam R$ 0,80.

100 cópias custariam R$ 8,00. Restam então R$ 2,00.

Se 10 cópias custam R$ 0,80, 20 cópias custariam R$ 1,60.

Restam então R$ 0,40. Com este valor, pela tabela, podemos ainda tirar mais 5 cópias. Logo, poderíamos tirar 100 + 20 + 5, o que dá um total de 125 cópias.

Leitura de gráficos

Assim como as tabelas, os gráficos também apresentam grandes quantidades de informações e necessitamos fazer uma leitura para obtê-las.

Vejamos a seguinte situação:

No ano de 2001, o Brasil passou por uma crise energética, levando muitos estados a fazer racionamento de energia. Nesses estados, algumas empresas e edifícios fizeram gráficos para informar o consumo de energia e também solicitar às pessoas que os freqüentavam que fizessem economia.

Resolvendo o problema

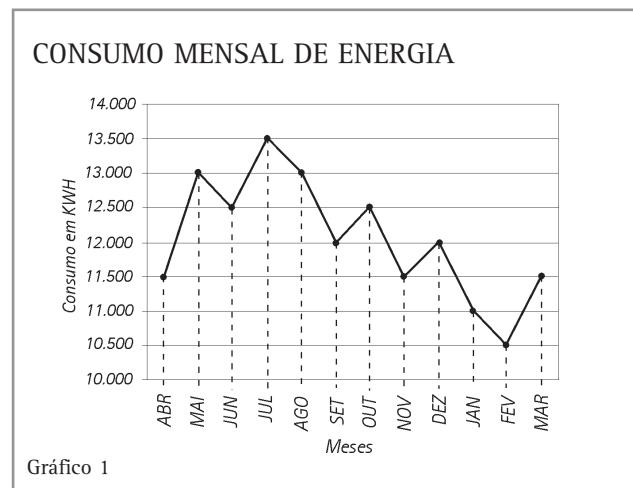
Vamos considerar o exemplo do consumo de energia de um prédio nos últimos doze meses, apresentado no Gráfico 1.

Observe que este gráfico apresenta, numa linha horizontal, os meses do ano e, numa linha vertical, o consumo mensal. Esse consumo é expresso em kWh. *(Lê-se: "quilovate hora", que corresponde ao consumo de 1.000 Watts em uma hora).*

Veja que o gráfico apresenta alguns pontos que estão destacados. Você notou que cada um dos pontos assinalados no gráfico corresponde ao cruzamento de duas informações?

Ao observar isso, você pode olhar para o primeiro ponto da esquerda para direita e responder às seguintes questões:

- Qual o mês que corresponde a esse ponto?
- Qual o consumo de energia desse mês?

Cada ponto corresponde ao cruzamento das informações: **mês** do ano e **consumo** de energia.

Assim, o primeiro ponto corresponde ao cruzamento do mês de abril com o consumo de 11.500 kWh. Isso quer dizer que, durante o mês de abril, esse prédio consumiu 11.500 kWh. Agora é sua vez: localize o mês e consumo do segundo ponto do gráfico.

Veja outras questões que você já pode responder:

- Qual foi o consumo do mês de junho?

Repare que, para fazermos esta leitura, temos que localizar o mês solicitado e encontrar o ponto de cruzamento para chegar ao consumo. Faça isso e verifique se nesse mês o consumo foi de 12.500 kWh.

Queremos ressaltar que o gráfico apresenta somente doze pontos, que relacionam os meses com seus respectivos consumos. No entanto, os pontos estão ligados entre si, apenas para uma melhor visualização da variação do consumo de um mês para outro.

Gráfico 1

Desenvolvendo competências

4

PESQUISE

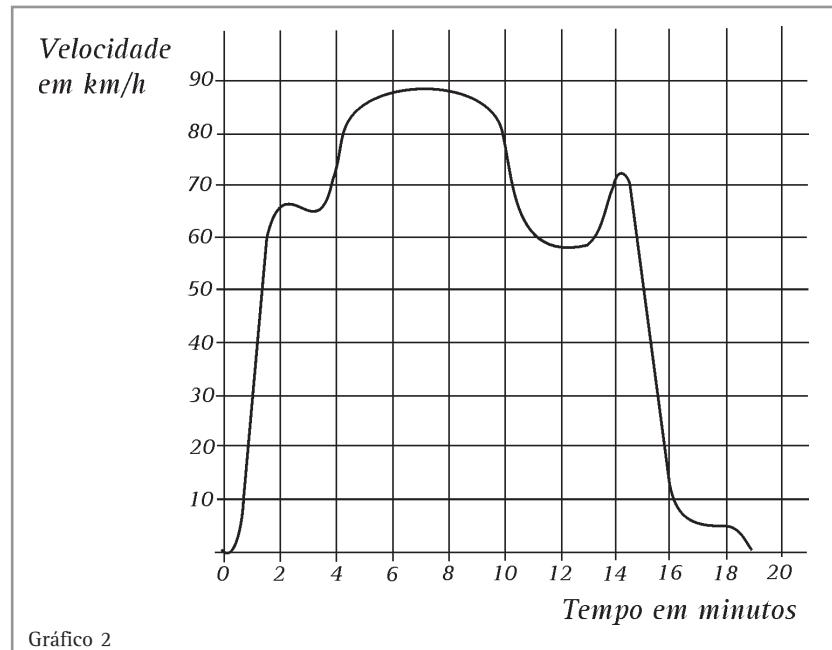
1. *Qual foi o maior consumo durante o ano? Em que mês isso ocorreu?*
2. *Qual o consumo de maio? Encontre outro mês que teve esse mesmo consumo.*
3. *Comparando os meses de junho e dezembro, qual deles teve o maior consumo?*
4. *Em quais meses foram consumidos 12.000 kWh?*
5. *Qual foi o menor consumo do ano? Quando isso ocorreu?*

Fazendo aproximações

Nem sempre os valores que desejamos obter estão marcados no gráfico. Às vezes temos que fazer estimativas e aproximações para obter a informação desejada. A situação a seguir apresenta leituras em que temos que fazer esse tipo de aproximação. Vejamos.

Um trem, ao percorrer o trajeto de uma estação a outra, anda ora mais rápido, ora mais devagar, seja pela presença de curvas ou pela má conservação dos trilhos. Se estivéssemos dentro dele, poderíamos perceber essas mudanças de velocidade, pois ficaríamos balançando para frente e para trás.

Quando o trem dá aquelas aceleradas e todo mundo inclina-se para trás, é porque a velocidade está aumentando; nas freadas, quando todo mundo cai para frente, é porque a velocidade está diminuindo. O Gráfico 2 apresenta as velocidades do trem durante o percurso entre duas estações. O tempo que ele levou para percorrer esse trajeto foi de 19 minutos. Veja como o gráfico que representa sua velocidade, começa no número 0 e termina no 19.

O gráfico foi construído em um sistema cartesiano, onde foi registrada a velocidade do trem em cada momento, durante os 19 minutos de percurso. Essa marcação formou uma curva que pode ser observada no gráfico.

Repare que o **tempo** está sendo assinalado numa reta horizontal e a **velocidade** numa reta vertical. Essas retas são chamadas de **eixos cartesianos.**

Observe agora só o eixo do tempo. Veja que não estão assinalados todos os minutos de 0 a 20. Assinale você os que faltam.

O mesmo ocorre nos valores da velocidade que se encontram no eixo vertical. Estes valores estão marcados de dez em dez. Assinale no eixo um ponto que corresponda a uma velocidade de 65 km/h.

Você deve ter assinalado no meio do segmento de reta entre 60 e 70.

Do mesmo modo, poderíamos utilizar nossa estimativa para marcar um ponto correspondente à velocidade de 31 km/h. Onde você marcaria?

Gráfico 2

Você pode pensar assim: como 31 está entre 30 e 40, o ponto a ser marcado deve estar no segmento de reta entre 30 e 40. Como o número 31 está mais próximo do 30 do que do 40, o ponto a ser marcado no segmento deve também estar mais próximo do 30.
Gostaríamos de lembrá-lo que, para fazermos a leitura desse gráfico, necessitamos cruzar duas informações. No gráfico temos as informações do **tempo** que o trem leva para percorrer o trajeto e também de sua **velocidade**.

Resolvendo o problema

Veja a curva que representa a velocidade do trem durante o tempo de 19 minutos. Essa velocidade foi medida a partir da saída da estação até chegar à outra. Vamos ver como foi a viagem.
Quando o trem saiu da estação, começamos a marcar o tempo. No momento em que iniciamos o cronômetro, era o tempo zero segundo, sendo que nesse instante o trem também estava numa velocidade zero, pois estava parado. Destaque na curva o ponto que indica a velocidade e o tempo zero.
Após a saída, vemos que a curva começa a subir, isto é, a velocidade do trem começa a aumentar. Nos primeiros dois minutos (vá acompanhando com um lápis sobre a curva), observamos que a velocidade subiu até atingir aproximadamente 66 km/h. Entre 2 e 3 minutos, o trem diminui um pouco a velocidade. Sendo que, logo após, volta a aumentar a velocidade. Ao atingir 5 minutos de viagem, a velocidade do trem pára de aumentar e permanece por alguns minutos sem variar muito. Continue com esse raciocínio e confira o que acontece com a velocidade do trem até o final da viagem.
Observando o gráfico, responda:

- Qual a velocidade aproximada do trem aos:

a) dez minutos?

b) dois minutos?

c) dezessete minutos?

Observe que, para encontrar a velocidade em que o trem estava aos 10 minutos, basta você acompanhar as linhas já existentes da malha quadriculada. Para encontrar a velocidade do trem aos 2 minutos, a linha já existente na malha ajuda-o a chegar até a curva, mas, para ir da curva até o eixo da velocidade, você é que terá que traçar essa linha e verificar, por aproximação, qual seria o valor da velocidade. Para encontrar a velocidade em que o trem estava aos 17 minutos, você terá que traçar as duas linhas: a que vai do 17 até a curva e a que vai da curva até o eixo da velocidade.

Os valores aproximados das velocidades do trem que você deve ter encontrado são 80km/h, 66 km/h e 5 km/h. Como são valores aproximados, pode existir uma diferença de até 2 km/h em cada item, tanto para mais como para menos, devido à imprecisão da leitura feita no gráfico.

Desenvolvendo competências

PESQUISE:

1. *Qual a maior velocidade que o trem atingiu durante o percurso?*
2. *Dos 10 aos 14 minutos, qual é a menor velocidade que o trem atingiu?*
3. *Dos 5 aos 9 minutos, a velocidade do trem não mudou muito. Qual foi essa velocidade?*
4. *Em sua trajetória, o trem atingiu duas vezes a velocidade de 80 km/h. Em quais momentos isso aconteceu?*
5. *Dos 12 aos 16 minutos, qual a velocidade máxima que o trem atingiu?*
6. *Qual a velocidade do trem no tempo 19 minutos?*
7. *O que você pode concluir sobre a velocidade do trem dos 15 aos 16 minutos? E dos 17 aos 18 minutos?*

Interpretação da linguagem

Caro leitor, apesar de estranha, leia a frase abaixo:

Oi satuco me tadesco o minuca de quebala luarama.

Você entendeu alguma coisa? Que bom, não era para entender mesmo, pois a frase acima não significa nada. Essa frase foi feita juntando-se letras e sílabas conhecidas, produzindo uma frase possível de ser lida, mas sem possuir sentido. É possível, então, fazer uma leitura sem que exista uma compreensão.

Do mesmo modo, o fato de nós conseguirmos ler os gráficos e as tabelas não significa que estamos compreendendo o que está sendo lido. A compreensão e interpretação aparecem durante uma leitura ou após sua conclusão. É sobre esta compreensão que começaremos a discutir agora.

Interpretação de tabelas

Vejamos a situação a seguir:

A taxa de natalidade indica quantas crianças nasceram durante um ano em uma determinada região, em relação à população total dessa mesma região. Por exemplo, podemos ver pela tabela abaixo que a região Nordeste tem uma taxa de natalidade de 24 %. Isso quer dizer que, num grupo de 100 pessoas adultas, nascem 24 crianças a cada ano.

A tabela abaixo apresenta as taxas de natalidade das cinco regiões brasileiras.

Pesquisas mostram que:

1) as regiões brasileiras com maior nível de desenvolvimento econômico possuem menor taxa de natalidade;

2) as classes mais pobres e menos instruídas apresentam um alto índice de natalidade.

• Com essas informações, observe a tabela e indique a região brasileira que possui maior nível de desenvolvimento econômico.

• Indique qual das regiões apresenta um maior índice de pessoas com baixa renda.

Veja que, para responder ao que foi pedido, não basta fazer a leitura da tabela, mas também uma interpretação dela. A leitura nos auxiliará a determinar os valores dos índices de natalidade em relação às regiões, mas será uma reflexão sobre os dados lidos na tabela, comparados com as informações que o enunciado apresenta, que nos possibilitará determinar a resposta.

Considerando os dados lidos na tabela e os das pesquisas, podemos concluir que a região Sudeste apresenta maior desenvolvimento econômico, pois possui o menor índice de natalidade.

Sendo a região Norte a que apresenta a maior taxa de natalidade, concluímos que é a região que possuí o maior índice de pessoas de baixa renda.

Taxa de Natalidade no Brasil

Região	Sul	Nordeste	Centro-Oeste	Norte	Sudeste
Taxa de natalidade	19%	24%	21%	29%	18%

Tabela 5
Fonte: Adaptação dos dados do IBGE, 2002.

Interpretação de gráficos

Assim como as tabelas, também podemos interpretar gráficos. Essa interpretação decorre igualmente da leitura e reflexão sobre os dados lidos.

Você sabia que em alguns países as estações primavera, verão, outono e inverno acontecem em meses diferentes dos que acontecem aqui no Brasil? Esse fato pode ser observado em filmes ou desenhos animados, em que na época do Natal aparecem crianças brincando de construir bonecos de neve.
No Brasil, nessa mesma época do ano, estamos nos rios e nas praias desfrutando o verão.

Vejamos o seguinte problema.

O gráfico a seguir apresenta as temperaturas médias mensais de um certo país, durante o ano. Sabe-se que os três meses mais quentes correspondem ao verão e os três meses mais frios correspondem ao inverno.

Veja no Gráfico 3 que o eixo horizontal apresenta os meses do ano e o eixo vertical as temperaturas em graus Celsius.

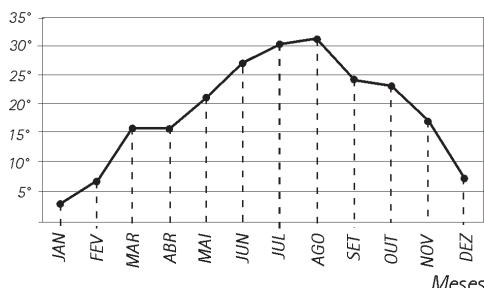



Gráfico 3

• Considerando as informações e os dados lidos no gráfico, determine quando ocorre o verão.

Observe que, para responder à questão, não é suficiente fazer apenas a leitura dos dados. Necessitamos aliar essa leitura às informações apresentadas pelo enunciado. Ao determinarmos pelo gráfico que os meses de junho, julho e agosto são os que possuem maior temperatura, concluímos que nesses meses ocorre o verão.

Desenvolvendo competências

6

PESQUISE

1. Quais são os meses de inverno nesse país?

2. Depois do inverno, vem a primavera. Em que meses ocorre a primavera nesse país?

3. No inverno, as temperaturas estão abaixo de:

a) 0º.

b) 3º.

c) 6º.

d) 9º.

Criando respostas

Normalmente os problemas não são resolvidos apresentando-se apenas uma simples resposta. Às vezes temos que justificar por que fizemos uma determinada escolha e não outra. Em outras situações devemos explicar por que a resposta dada é a mais adequada.

Essa justificativa também é chamada de **argumentação**. A argumentação deve ser formada por um raciocínio lógico, apoiado em dados, a fim de concluir alguma coisa. No nosso caso, os dados coletados serão apresentados por tabelas ou gráficos.

Leia o texto a seguir e reflita um pouco sobre uma situação gravíssima que futuramente o Brasil poderá enfrentar:

O Gráfico 4 apresenta os hábitos de consumo de água de alguns lugares. Este gráfico, chamado de gráfico de barras, possui uma legenda à direita, que relaciona a informação aliada a uma cor com as barras do gráfico.

Observe o gráfico e veja que 42% da água consumida na Suíça é gasta pelas bacias sanitárias, 37% é gasta pelos banhos das pessoas, 18% pelas torneiras das cozinhas e para lavagem de roupas e 5% por outros meios. Observe também que os gastos de água dos outros países são semelhantes aos da Suíça.

Se não houver uma conscientização das pessoas do mundo inteiro, futuramente passaremos por uma crise de falta de água potável de proporções inimagináveis. Para solucionar o problema, os governantes deverão tomar medidas como o racionamento. Países mais desenvolvidos já estão fazendo um levantamento dos hábitos de consumo de água, a fim de tomarem providências antecipadas.

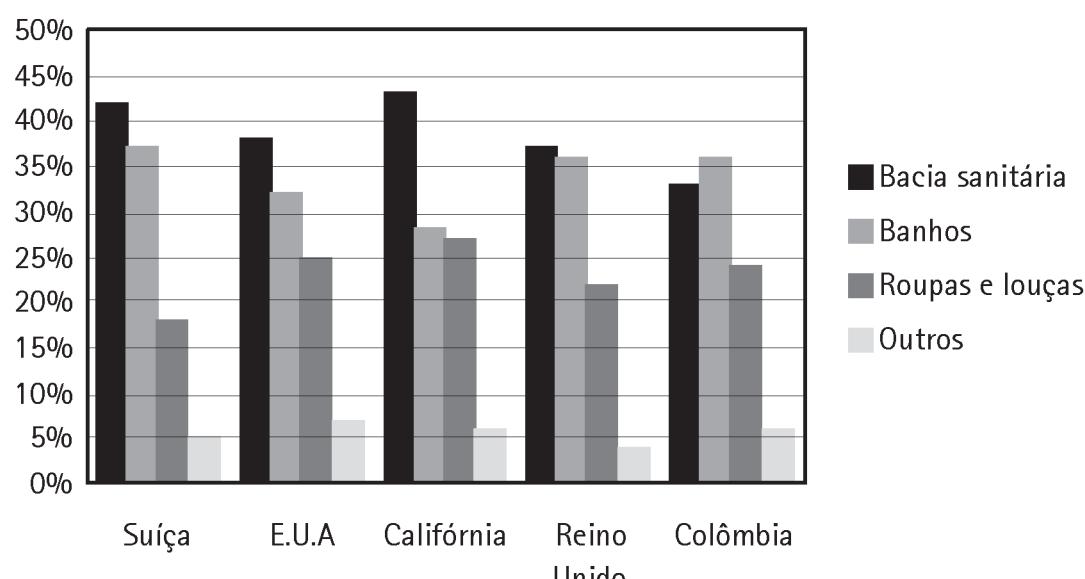



Gráfico 4

Resolvendo o problema

Em questões de múltipla escolha somente uma resposta é correta. Em especial, as questões que envolvem argumentações necessitam da análise de cada uma das respostas apresentadas, para se verificar qual delas pode ser sustentada pelo problema. A seguir apresentaremos uma questão com essa característica, portanto pense em um argumento para validar ou invalidar cada uma das alternativas.

• Se você fosse o dirigente de um país preocupado com o gasto de água e dispusesse de um gráfico idêntico ao apresentado, que medidas poderia propor para haver economia de água? Assinale a alternativa mais adequada.

(a) Propor à nação que bebesse menos água para ajudar na economia.

(b) Solicitar que as pessoas armazenassem água em suas residências para um eventual racionamento.

(c) Solicitar pesquisas no setor hidráulico para criar dispositivos econômicos no setor de descargas de água.

(d) Fazer uma campanha para as pessoas deixarem as caixas d'água abertas para aproveitar as águas da chuva.

Veja algumas análises em que talvez você tenha pensado.

A alternativa (a) seria uma resposta inválida, pois, pelo gráfico, esse tipo de consumo se encaixaria na categoria "outros", que corresponde a um consumo insignificante se comparado com os demais.

A alternativa (b) seria uma proposta que não acarretaria economia de água, sendo que provavelmente haveria um aumento do consumo, pois, fora os gastos normais, haveria um gasto de estocagem de água.

A alternativa (c) poderia proporcionar dispositivos mais econômicos no consumo das descargas sanitárias. Podemos observar no gráfico que, em quase todos os países, o maior consumo de água é para esse fim; logo, dispositivos hidráulicos mais econômicos proporcionariam uma economia no consumo de água, sendo então a alternativa correta.

A alternativa (d) não é uma atitude correta, pois já vimos nos jornais e nas campanhas de combate a epidemias que deixar abertas caixas d´água ou lugares que acumulem água parada favorece a proliferação de mosquitos transmissores de doenças, como dengue e malária.

Desenvolvendo competências

7

PESQUISE

1. O que você poderia propor para sua comunidade, de forma a ajudar o seu bairro a economizar água?

a) Solicitar à comunidade uma ajuda financeira para investir em pesquisas de desenvolvimento de equipamentos hidráulicos mais econômicos.

b) Conversar com amigos e parentes sobre uma possível crise de água num futuro próximo, a fim de criar uma conscientização e combate ao desperdício de água.

c) Não proporia nada, pois a água nunca vai acabar.

d) Solicitar à comunidade que beba mais refrigerantes e cervejas, a fim de economizar água.

2. O que você poderia fazer para combater o desperdício de água?

a) Tomar banhos demorados.

b) Ingerir menos líquidos para economizar água.

c) Lavar ruas e calçadas para melhorar a saúde pública.

d) Criar uma cultura de economia de água em sua própria casa.

Variações e períodos

Você já deve ter ouvido ou visto em algum jornal algo como: “O dólar teve uma alta de 2,35% em relação ao real”, ou “A gasolina vai aumentar R$ 0,15”, ou ainda “A Bolsa de Valores teve uma queda de 1,55%”. A diferença entre o preço do dólar no dia anterior e hoje, ou do preço da gasolina, é chamada de **variação**.

O conceito de variação é muito utilizado nas interpretações de gráficos e tabelas. Ele nos permite quantificar as mudanças, ou seja, determinar o quanto algo mudou entre dois momentos. Costumamos chamar também o tempo que decorreu entre dois momentos de **período**.

Vamos trabalhar um pouco com estes dois conceitos.

Maria montou uma tabelinha marcando seu peso dos 20 aos 26 anos. Ela informou também que aos vinte anos estava com o peso ideal.

Idade (anos)	20	21	22	23	24	25	26
Peso (kg)	50	52	60	70	70	55	51

Tabela 6

Observe que, dos 20 aos 21 anos, ela engordou 2kg; logo, durante o **período** de 20 a 21, ela teve uma **variação** de 2kg em seu peso.

Do mesmo modo, seu peso também variou dos 21 aos 22 anos, dos 22 aos 23 anos, dos 23 aos 24 anos etc.

Vamos montar uma tabelinha com as variações do peso de Maria:

Período (anos)	*Variação (kg)*
20 - 21	2
21 - 22	8
22 - 23	
23 - 24	
24 - 25	
25 - 26	

Tabela 7

Encontre os valores das variações de peso durante esses períodos.

Na construção dessa tabela, talvez você tenha encontrado duas dificuldades que normalmente aparecem quando falamos de variação.

A primeira dificuldade que pode ter surgido foi no período de 23 a 24 anos, pois nesse período o peso de Maria não mudou, ou seja, poderíamos dizer que não variou. Quando estivermos verificando variações e observarmos que entre duas leituras não houve nenhuma mudança, indicaremos a variação pelo valor zero. Logo, no caso de Maria, a variação dos 23 aos 24 anos é 0.

Outra dificuldade que você talvez tenha encontrado pode ter sido em distinguir quando Maria estava engordando ou emagrecendo. Como iremos diferenciar estas variações?

Lembre-se de que estamos estudando a variação do peso. O fato de engordar significa ganhar peso. Ganhar nos faz lembrar de algo positivo, o que nos leva a tratar intuitivamente essa variação com um valor positivo. Já emagrecer, significa perder peso, logo podemos indicar essa variação por valores negativos, pois expressam uma perda de peso. Por exemplo, dos 25 aos 26 anos ela teve uma variação de -4, ou seja, perdeu 4 quilos.

Anote os dados de sua tabela com valores positivos e negativos, caso não tenha feito.

8

Desenvolvendo competências

PESQUISE

1. Qual foi a maior variação do peso de Maria? Essa variação foi positiva ou negativa? O que significa a variação encontrada?

2. Que variação de peso ela teve no período de 20 a 23 anos?

3. Que variação de peso ela teve no período de 24 a 26 anos?

Variação de gráficos e tabelas

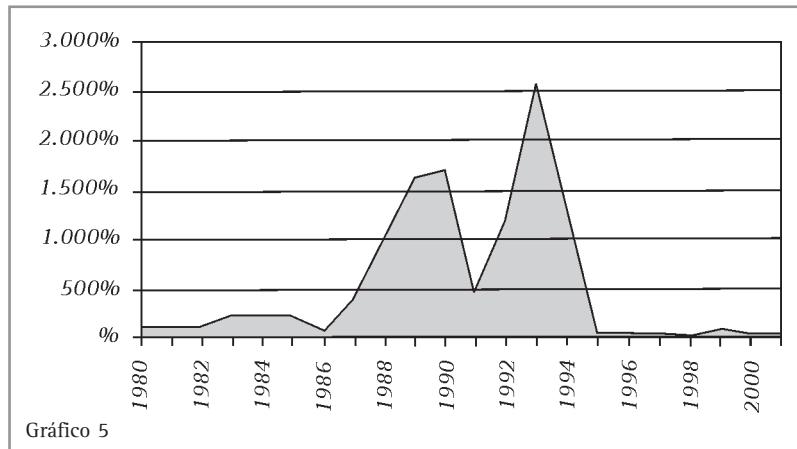
Independente de preferências políticas ou ideológicas, a simples observação de gráfico e tabela nos permite fazer uma análise sem entrar no mérito das causas.

Em 2001, a inflação estava por volta dos 10% a.a. (*lê-se "dez por cento ao ano", que é o aumento de inflação durante o período de um ano*).

Você se lembra de quanto era a inflação anual há quinze anos? A tabela ao lado o auxiliará a recordar aqueles tempos:

ANO	*Inflação anual*	*Presidente*
1980	110 %	João Baptista Figueiredo
1981	95 %	
1982	100 %	
1983	221 %	
1984	224 %	
1985	235 %	José Sarney
1986	655 %	
1987	416 %	
1988	1.038 %	
1989	1.609 %	
1990	1.700 %	Fernando Collor de Mello/Itamar Franco
1991	458 %	
1992	1.175 %	
1993	2.567 %	
1994	1.247 %	
1995	15 %	Fernando Henrique Cardoso
1996	9 %	
1997	8 %	
1998	2 %	
1999	20 %	
2000	10 %	
2001	10 %	

Tabela 8

Podemos ver, pela tabela, que a inflação nesses vinte e dois anos teve seus altos e baixos.

Só para você ter uma idéia, um refrigerante que custa hoje R$ 2,00, com uma inflação de 1.000% a.a., depois de um ano estaria custando R$ 20,00. Depois de mais um ano, estaria custando R$ 200,00, chegando ao absurdo de custar R$ 2.000,00, após mais um ano. Parece loucura, mas já foi assim.

O Gráfico 5 a seguir foi feito com os dados da tabela. Observe que algumas características são mais visíveis no gráfico: por exemplo, para observar quando ocorreu a maior inflação nesse período, uma rápida olhada nos permite identificar o ano de 1993.

Gráfico 5

Resolvendo o problema

- Utilizando o gráfico e a tabela, determine a inflação anual de 1996.

Você deve ter percebido que, pelo gráfico, não se consegue fazer uma leitura aproximada desse ano. Sendo que, pela tabela, determina-se exatamente uma inflação de 9% a.a. A dificuldade de se fazer uma leitura aproximada do ano de 96 pelo gráfico se dá pela **escala** em que o eixo se encontra. Como o eixo está subdividido de 500 em 500, só conseguimos fazer aproximações na ordem das centenas. Por exemplo, uma leitura do gráfico para o ano de 1983 é aproximadamente 200% a.a.

Desde 1986, o Brasil vem passando por diversos Planos Econômicos, como Cruzado I e II, Bresser, Verão, Collor I e II e Real.

- Durante o mandato do Presidente José Sarney, uma de suas tentativas de conter a inflação foi o Plano Cruzado, lançado em 1º março de 1986. Analise os dados apresentados e crie um argumento coerente sobre o sucesso ou fracasso desse Plano.

Você deve ter percebido que, durante o mandato do referido presidente, o ano de 86 foi o que apresentou menor inflação. Entretanto, os três anos subseqüentes tiveram aumentos elevadíssimos; logo, podemos concluir que o Plano fracassou, pois não conseguiu conter o aumento progressivo da inflação e ainda causou um aumento maior.

O Plano Collor foi instituído pela Lei 8.024/90 de 12 de abril de 1990 e adotado pelo presidente da República, Fernando Collor de Mello. A meta do Plano era a estabilização da moeda, através da tentativa de confisco monetário, congelamento de preços e salários e reformulação dos índices de correção monetária. Em abril a inflação desabou de 45% ao mês para 7,87%. Porém, quatro meses depois, "o tigre" ressuscitou, levando mais uma vez a inflação a atingir níveis muitos elevados. No dia 1º de fevereiro de 1991, uma nova tentativa foi feita para conter a inflação: o Plano Econômico Collor II.

- Utilizando o texto, o gráfico e a tabela, crie argumentos para relatar se os Planos Collor I e II foram bem sucedidos.

Uma argumentação que você pode ter feito foi comentar que esses dois Planos contiveram a inflação por um curto período de tempo, mas pode-se ver, pelo gráfico ou pela tabela, que essas tentativas não tiveram sucesso a longo prazo.

Você pode ter comentado também que o Plano Collor I conseguiu apenas manter uma inflação anual próxima à do ano anterior; já o Plano Collor II conseguiu causar uma diminuição significativa da inflação anual. No entanto, passados dois anos, a inflação atingiu marcas altíssimas, acima dos 2.500% a.a.

Desenvolvendo competências

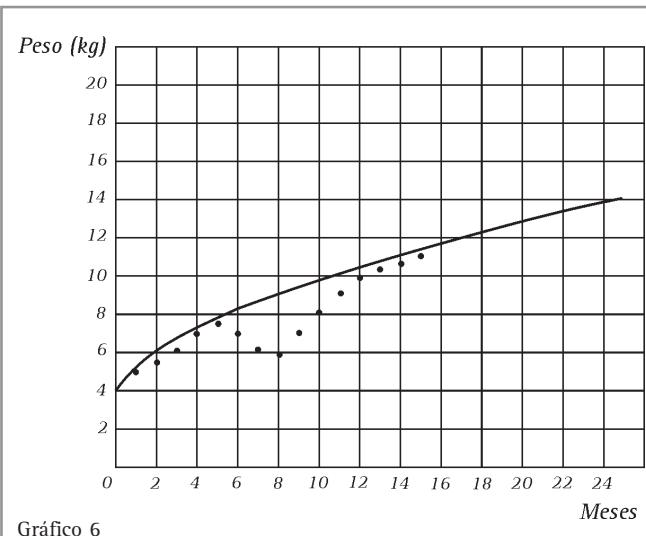
9

PESQUISE

O Plano Real começou a ser gerado em junho de 1993, ocorrendo a conversão do Cruzeiro para o Real em julho de 1994. O objetivo era criar condições necessárias para a implementação de um plano de estabilização econômica.

- *Crie uma argumentação para relatar se o Plano Real teve sucesso no combate à inflação.*

Os gráficos que ajudam a saúde

Uma mãe leva mensalmente seu filho de 15 meses ao pediatra. A cada mês, o médico marca pontos na malha quadriculada, indicando o peso dessa criança. Localize esses pontos.

A curva que aparece próxima a esses pontos indica os pesos normais que uma criança deve apresentar durante os 24 primeiros meses de vida. Os médicos costumam fazer comparações entre os pontos marcados e essa curva.

- Faça a leitura dos dois primeiros pontos da esquerda para a direita.

Nós já fizemos esse tipo de leitura em capítulos anteriores. Você deve ter visto que o primeiro ponto indica que a criança no primeiro mês possuía um peso aproximado de 5 kg.

- Observe todos os pontos que o médico marcou e compare com a curva. Durante esses 15 meses, você acha que essa criança teve um desenvolvimento normal? Justifique sua resposta com argumentações apoiadas pela leitura do gráfico.

Talvez você tenha suposto que a criança tenha apresentado um desenvolvimento normal até o 5º mês e, por algum motivo, do 5º ao 8º mês apresentou problemas que a fizeram perder peso. Após o 8º mês, começou a ganhar peso, se aproximando do desenvolvimento normal novamente.

Gráfico 6

- Marque um ponto relativo a uma criança de cinco meses pesando sete quilos. Ela está com o desenvolvimento normal?

Se você respondeu com um "sim", deveria ter um pouco mais de cuidado. Por exemplo, se essa criança nos seus quatros meses de vida tivesse pontos que representassem seu peso bem acima na curva, no 5º mês ela teria perdido peso. Por isso, temos que ter cuidado ao analisar um caso isolado. Sendo mais cautelosos, poderíamos responder que a criança, para o 5º mês, possui um peso próximo do normal.

• Qual seria o peso normal para uma criança de um ano?

Essa pergunta já não necessita de tanto cuidado. Basta procurar na curva o ponto correspondente aos 12 meses e verificar que a criança, para ter um peso normal, deveria ter, aproximadamente, 10 quilos e meio.

Desenvolvendo competências

10

PESQUISE

Suponha que você possui um filho e não tem condições de levá-lo mensalmente a um pediatra, porém gostaria de acompanhar o desenvolvimento dele pelos gráficos. Mensalmente você faz sua pesagem e o mede, obtendo os dados indicados na Tabela 9:

1.Coloque os dados nos gráficos abaixo e avalie se o desenvolvimento do seu filho está normal.

Mês	Peso (kg)	Medida (cm)
nascimento	*4*	*51*
1	*4,8*	*54*
2	*6*	*55*
3	*6,5*	*58*
4	*7*	*61*
5	*7,7*	*63*
6	*8,1*	*65*
7	*8,5*	*67*

Tabela 9

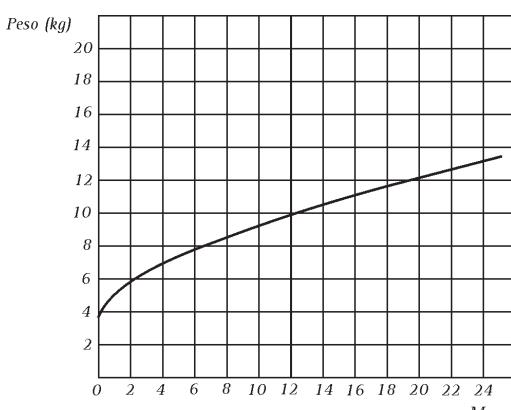



Gráfico 7

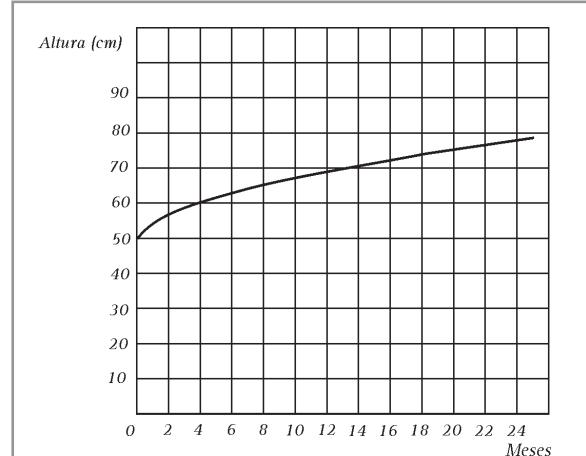



Gráfico 8

Para terminar

Prezado leitor, durante todo o capítulo propusemos situações-problema possíveis de serem encontradas em seu dia-a-dia. Com isso, tentamos mostrar a importância do conhecimento matemático aqui estudado, auxiliando-o na aquisição de novas informações, que o ajudarão a exercer melhor sua cidadania.

> *"Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível e de repente você estará fazendo o impossível."*
>
> (São Francisco de Assis)

Conferindo seu conhecimento

1

4	0,32
6	0,48
8	0,64
9	0,72

2

4	4,80
7	8,40
8	9,60
9	10,80

3

LEITURA DE TABELAS

1. Houve 99 participantes em 98. A seleção campeã foi a França.

2. A copa de 86 foi realizada México. O Brasil ficou em 5º lugar.

3. A seleção campeã da Copa da Espanha foi a Itália, no ano de 1982.

4. Pela tabela, o menor número de participantes das copas ocorreu em 1954.

4

LEITURA DE GRÁFICOS

1. O maior consumo foi de 13.500 KWh referente ao mês de julho.

2. Em maio foram consumidos 13.000 KWh, o mesmo consumo de agosto.

3. O mês de junho.

4. Setembro e dezembro.

5. Consumo de 10.500 kWh, referente ao mês de fevereiro.

5 *FAZENDO APROXIMAÇÕES*

1. A maior velocidade foi de aproximadamente de 88 km/h.

2. Aproximadamente 58 km/h.

3. Aproximadamente 88 km/h.

4. O trem atingiu 80 km/h aos 10 minutos e aos 4 minutos e meio.

5. Aproximadamente 72 km/h.

6. Aos 19 minutos o trem parou, portanto sua velocidade era 0 km/h.

7. Entre os 15 e 16 minutos a velocidade variou bastante, pois passou de 50 km/h para 10 km/h. Já entre 17 e 18 minutos, a velocidade não variou muito, ficando aproximadamente nos 5 km/h.

6 *INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS*

1. Os meses são dezembro, janeiro e fevereiro.

2. Nos meses de março, abril e maio.

3. Resposta: d.

7 *CRIANDO RESPOSTAS*

1. Resposta: b.

2. Resposta: d.

8 *VARIAÇÕES E PERÍODOS*

1. Houve uma variação de 15 kg. A variação foi negativa, significando que Maria perdeu quinze quilos.

2. Houve uma variação positiva de 20 kg.

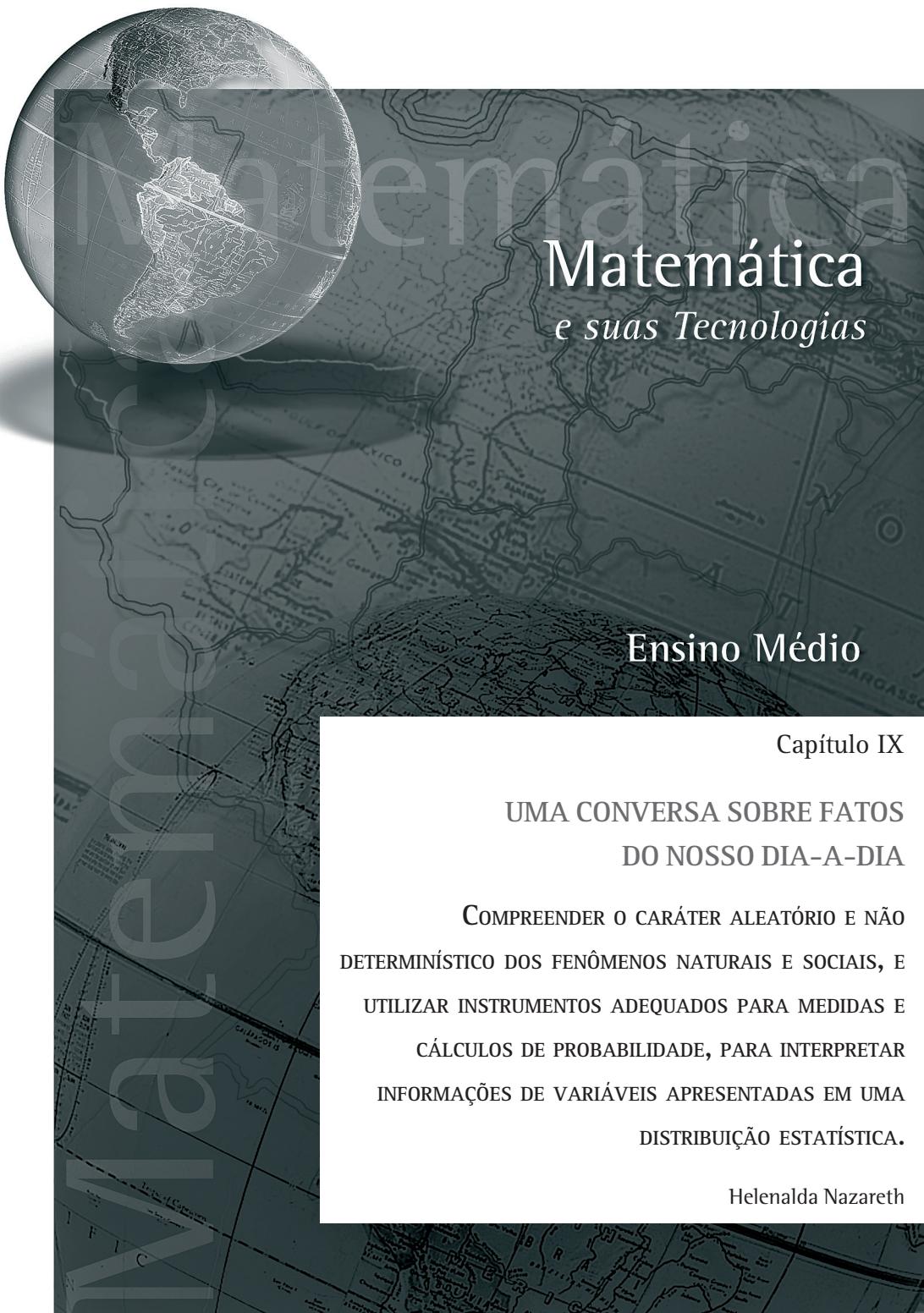
3. Houve uma variação negativa de 19 kg.

9 *VARIAÇÃO DE GRÁFICOS E TABELAS*

Você poderia ter respondido assim:

Se comparado com os outros Planos Econômicos, que reduziam por um curto período de tempo a inflação (mais ou menos um ano), podemos afirmar que o Plano Real teve sucesso em relação ao combate à inflação, pois, até o momento, o Brasil apresentou apenas inflações anuais menores que 21%.

10 *OS GRÁFICOS QUE SALVAM VIDAS*

Pela comparação dos pontos marcados e as curvas do gráfico, pode-se concluir que a criança teve um bom desenvolvimento durante os sete meses apresentados pela tabela.

ORIENTAÇÃO FINAL

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Reconhecer e interpretar as informações de natureza científica ou social expressas em gráficos ou tabelas.
- Identificar ou inferir aspectos relacionados a fenômenos de natureza científica ou social, a partir de informações expressas em gráficos ou tabelas.
- Selecionar e interpretar informações expressas em gráficos ou tabelas para a resolução de problemas.
- Analisar o comportamento de variável, expresso em gráficos ou tabelas, como importante recurso para a construção de argumentação consistente.
- Avaliar, com auxílio de dados apresentados em gráficos ou tabelas, a adequação de propostas de intervenção na realidade.

Capítulo IX

UMA CONVERSA SOBRE FATOS DO NOSSO DIA-A-DIA

COMPREENDER O CARÁTER ALEATÓRIO E NÃO DETERMINÍSTICO DOS FENÔMENOS NATURAIS E SOCIAIS, E UTILIZAR INSTRUMENTOS ADEQUADOS PARA MEDIDAS E CÁLCULOS DE PROBABILIDADE, PARA INTERPRETAR INFORMAÇÕES DE VARIÁVEIS APRESENTADAS EM UMA DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA.

Helenalda Nazareth

Capítulo IX

Uma conversa sobre fatos do nosso dia-a-dia

Jogando, pesquisando e aprendendo Estatística

No decorrer de nossa conversa, iremos propor a você que reflita sobre algumas questões do dia-a-dia e que as tente responder, para perceber a teoria envolvida. Você irá adquirir conhecimentos, interpretando informações, que lhe darão oportunidade de compreender fenômenos naturais e sociais.

Conversando sobre fenômenos

Fenômenos: eventos ou acontecimentos.

Você já jogou na loteria esportiva? Se não jogou, conhece alguém que já tenha jogado?

É possível saber a chance que temos de ganhar.

Vamos iniciar com um jogo de cara e coroa. Se você tiver aí uma moeda, escolha a face que você aposta que vai cair. Lance-a ao ar e aguarde que ela caia.

Deu cara ou coroa? Você ganhou?

Que chance você tinha para ganhar nesse jogo?

Você dispunha de duas possibilidades de escolha e escolheu uma. Sua chance de ganhar era de 1 em 2.

E se você soltar uma moeda, ela cairá ou não? Você deve ter dito que a moeda cairá. Esse **fenômeno** é **determinístico**. Você pode repeti-lo quantas vezes quiser, nas mesmas condições, que o resultado será sempre o mesmo: a moeda cairá, se não houver nada ou ninguém que a segure, em locais onde haja a força da gravidade.

No caso de a moeda dar cara ou coroa, ou você acerta ou você erra. Acertar que face cairá depende da sua sorte. A sua **probabilidade**, isto é, a chance de acertar é de 1 para 2. Este fenômeno é chamado aleatório, não é determinístico. Quando você jogar a moeda novamente, poderá acontecer ou não o mesmo resultado. Em outras palavras, dizemos que um **fenômeno** é **aleatório** se, observado sob as mesmas condições, podemos, no máximo, falar de seus possíveis resultados.

Se você lançar um dado, o resultado é um fenômeno aleatório ou determinístico?

Escreva duas situações para um fenômeno aleatório e duas para um fenômeno determinístico.

Resolvendo o Problema

Vamos fazer o jogo do dado. Você pode apostar em qualquer dos números que aparecem em suas faces: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Escolha um.

Qual será sua chance de ganhar?

Para responder, pensemos juntos:

- você fez uma escolha: por exemplo, vai cair o número 4.
- qual é o número de possíveis resultados, quando você jogar o dado?
- quantos resultados são favoráveis para que você ganhe?

Quando você joga o dado, há seis possíveis resultados e dos seis, apenas um ocorrerá. A sua chance de ganhar, neste jogo é de 1 para 6 . Uma forma de escrever sua chance de ganhar é $\frac{1}{6}$.

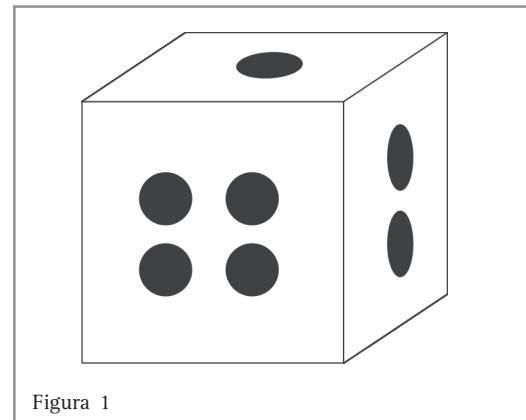



Figura 1

Desenvolvendo competências

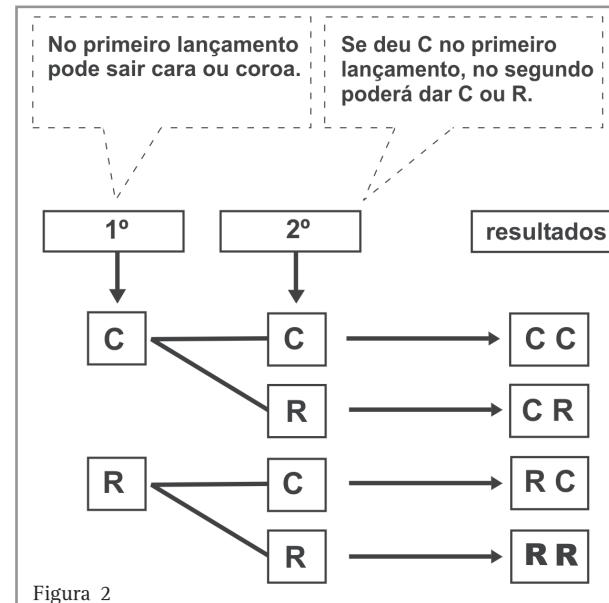
1

Resolvendo mais problemas.

Jogue uma moeda para cima e anote que face caiu. Se caiu "cara", escreva C. Se caiu "coroa", escreva R.

Jogue novamente a moeda. Que face caiu voltada para cima? Escreva a letra que representa esta face (C ou R), ao lado da letra que você já tinha escrito. Suponhamos que tenha caído R no primeiro lançamento e R no segundo. Você deve ter registrado o resultado RR.

Poderiam ter ocorrido resultados diferentes?

Se você quiser saber qual é a probabilidade de sair "coroa" nos dois lançamentos (RR), poderá ir escrevendo os possíveis resultados em um esquema. Veja ao lado.

Esse esquema é chamado árvore de possibilidades e facilita a visualização e a contagem das possibilidades. Podemos contar e saber que são quatro os possíveis resultados, nos dois lançamentos de uma moeda:

CC **CR** **RC** **RR.**

A probabilidade de obtermos R, nos dois lançamentos (RR), é de **um** em **quatro.**

Indicamos: $\frac{1}{4}$.

(Lembre-se, tenho 1 situação favorável, no total de 4 possíveis resultados.)

Figura 2

Vamos agora pensar em um problema de Biologia. Suponhamos que um casal queira ter dois filhos. O primeiro filho poderá ser do sexo masculino (M) ou feminino (F). O segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Que chance esse casal tem de ter os dois filhos do sexo masculino (MM)?

Para responder, desenhe uma árvore, conte as possibilidades e descubra a probabilidade de acontecer MM.

Você sabia que podemos colocar o resultado da probabilidade em forma de porcentagem?

Em Estatística trabalhamos muito com porcentagens.

No problema que você acabou de resolver, a chance de um casal ter os dois filhos do sexo masculino é de 1 em 4, ou seja, $\frac{1}{4}$.

Veja a representação da porcentagem.

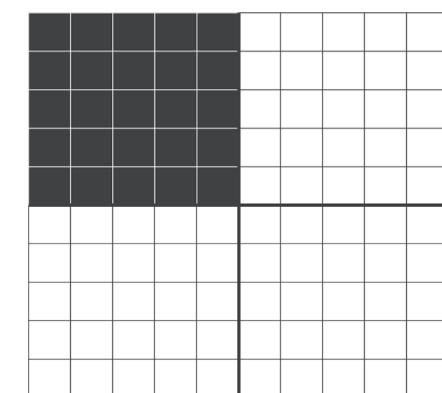



Figura 3

Se você tiver um quadrado dividido em 100 partes do mesmo tamanho, a parte pintada representa $\frac{1}{4}$ do quadrado, ou 25 dos 100 quadradinhos em que o quadrado maior foi dividido.
Podemos escrever: $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.
25/100 é o mesmo que 0,25 ou 25%, então, 25% é o mesmo que $\frac{1}{4}$.

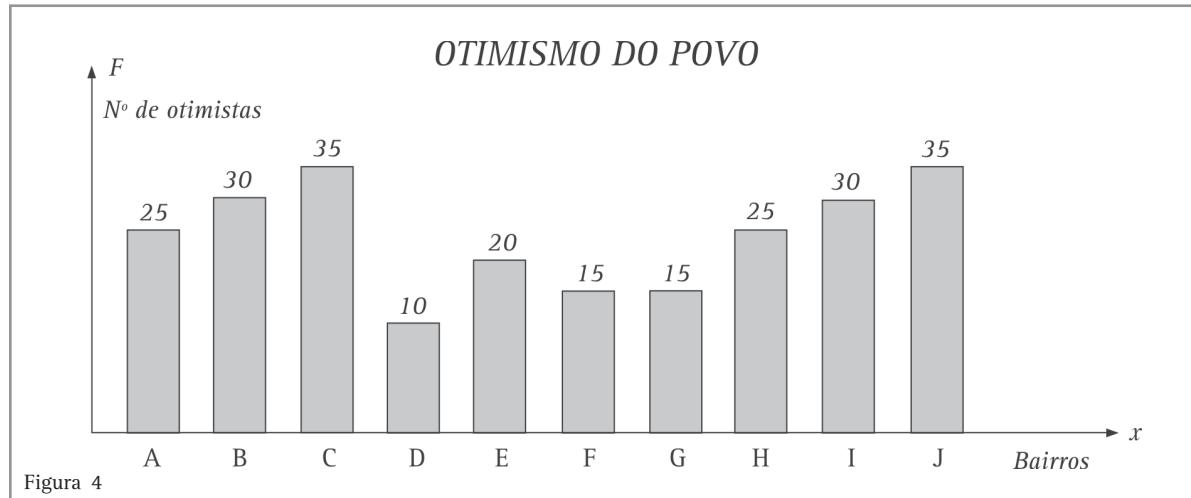
Então, podemos dizer que a probabilidade de um casal ter dois filhos do sexo masculino é de 25%.

Vamos, agora, mudar um pouco a situação.

Você é um pesquisador e quer escolher 10% das pessoas de sua cidade, com mais de 16 anos, para responderem à questão de sua pesquisa. Como você escolheria essas pessoas? (Não vale escolher seus amigos.) Sua cidade está dividida em bairros?

Vamos imaginar que sua cidade tenha 24.000 habitantes, com mais de 16 anos, e que esteja organizada em 80 bairros. Você poderá sortear 10% dos bairros e 10% dos 24.000 habitantes, com mais de 16 anos, ou seja, 8 bairros e 2.400 habitantes distribuídos nestes 8 bairros.

Um pesquisador precisa escolher um número significativo de habitantes desta cidade para compor a amostra. No exemplo da cidade acima, a amostra é formada pelos 2.400 habitantes que foram sorteados, nos 8 bairros. A **amostra** é **aleatória.**

O sentido principal da amostra é a representatividade estatística da população, para que, estudando a amostra, as conclusões obtidas possam ser estendidas para toda a população. Existem técnicas apropriadas para selecionar amostras e fazem parte dos estudos da Estatística.

Resolvendo o Problema

Suponhamos que um jornal tenha publicado a reportagem:

"A Cidade X está otimista!"

Foi feita uma pesquisa na Cidade X, que está organizada em 100 bairros, tendo em média 400 habitantes cada um. Foram selecionados 10% dos bairros e 10% dos habitantes de cada bairro. De 400 pessoas entrevistadas, 60% estão otimistas, isto é, afirmam que o próximo ano será melhor do que o atual.

Figura 4

Observe o gráfico. Em que bairro há menos otimistas ? E, no total, quantos são os otimistas ?

Você sabe qual é a população da cidade ?

Leia novamente o texto. Podemos considerar que há 100 bairros, com 400 moradores em cada um, então, a população da cidade é de

100 · 400 = 40.000 habitantes.

Foram entrevistadas 40 pessoas de cada um dos 10 bairros sorteados, em um total de 400 pessoas.

Se 60% estão otimistas, quantas pessoas responderam que o próximo ano será melhor?

Com base nas respostas de 400 pessoas, o jornal afirma que 60% da população está otimista. Isto significa que 60% das 400 pessoas entrevistadas responderam que o próximo ano será melhor que o atual. Se quisermos saber quantas pessoas se mostraram otimistas, basta calcularmos 60% de 400:

$$\frac{60}{100} \cdot 400 = 240 \quad \text{ou} \quad 0{,}60 \cdot 400 = 240.$$

Observando o gráfico, você pode ver que a coluna mais baixa é a do bairro D, este é o bairro que apresenta o menor número de otimistas, apenas 10.

Desenvolvendo competências

2

Vamos resolver problemas.

Você já assistiu a algum programa de televisão em que são feitos sorteios?

Imagine que um programa de televisão vai sortear uma pessoa de sua cidade, para dar um prêmio. A cidade está organizada em 50 bairros e a emissora vai iniciar sorteando um dos bairros.

Se você morasse no bairro A, gostaria que ele fosse sorteado? Qual seria a chance de seu bairro ser sorteado?

Agora, a emissora de TV vai sortear uma rua entre as 500 de seu bairro.

Qual é a probabilidade de ser sorteada a rua em que você mora, entre as 500 de seu bairro?

Supondo que cada bairro de sua cidade tem, em média, 500 ruas, o número total de ruas da cidade é de 50 . 500 = 25.000 ruas.

Qual é a chance de ser sorteada a sua rua, entre as ruas da cidade?

Se em uma cidade há 50 bairros, em cada bairro há, em média, 500 ruas, e em cada rua existem, em média, 80 casas, qual é a probabilidade de uma casa da cidade ser sorteada?

Vamos conversar mais um pouco

A Estatística trabalha com métodos de coleta, organização, apresentação e análise de dados, permitindo-nos conclusões e tomadas de decisões.

Você já respondeu a algum telefonema perguntando se sua TV está ligada, ou em que canal está sintonizada? Essa é uma pesquisa que interessa às emissoras de TV para medir seus índices de audiência. Assim, elas decidem se determinado programa continuará sendo transmitido ou não.

É comum, também, dias antes das eleições, serem feitas pesquisas sobre a preferência dos eleitores por determinados candidatos, sendo feitas previsões de quem poderá ser o vencedor. Essa pesquisa é feita com uma parte dos eleitores.

Um pesquisador foi coletar dados, no comício do candidato A, para uma pesquisa sobre a preferência em relação aos candidatos à Prefeitura da cidade.

Qual você acha que foi o resultado dessa pesquisa?

Você confia nesse resultado? Por quê ?

É claro que, no caso deste exemplo, o resultado não é confiável, porque a escolha das pessoas entrevistadas não foi aleatória. Já era esperado que a maioria das pessoas que estavam no comício era eleitora do referido candidato.

A maneira como as pessoas são escolhidas para participar da pesquisa é chamada **amostragem** e, se ela não for aleatória, teremos uma amostra viciada.

Se, para a coleta de dados, fossem sorteados alguns cruzamentos de ruas da cidade e fossem entrevistadas pessoas que por ali passassem, durante determinado dia, também sorteado dentro de um período, a amostragem seria aleatória. A população envolvida na pesquisa seria formada por todas as pessoas que costumam passar por cada um desses cruzamentos.

Veja um outro exemplo:

O proprietário do barzinho de uma escola fez uma pesquisa para saber o gosto dos alunos. Para isto, solicitou que os alunos do período da tarde preenchessem a ficha:

Assinale o que você prefere:

- ☐ *Empadinha*
- ☐ *Sanduíche de presunto*
- ☐ *Sanduíche de queijo*
- ☐ *Cachorro quente*

Contando as respostas, o proprietário concluiu que 80% dos entrevistados preferiam sanduíche de presunto.

Preparou, então, os lanches fazendo 80% de sanduíches de presunto.

No fim do dia, ficou com muitos sanduíches de presunto, tendo vendido mais os sanduíches do tipo cachorro quente. Percebeu que, no período da manhã, os alunos só queriam empadinhas ou cachorro quente.

Por que a pesquisa não deu certo ?

Como você acha que deveria ter sido feita a pesquisa para que desse certo?

Se a pesquisa foi feita com os alunos do período da tarde, o resultado só será válido para esse grupo. No nosso exemplo, a população da pesquisa envolvia todos os alunos da escola. A amostra deveria ter alunos de todos os períodos.

Para fazer melhor uma amostragem é preciso pensar na probabilidade de escolha dos elementos da amostra.

Pense no seguinte caso. Os alunos de uma escola estão distribuídos em três períodos.

Veja o quadro:

Número de alunos da Escola Municipal		
manhã	tarde	noite
500	200	100

Quadro 1

Você observou quantos alunos tem a escola?

No período da manhã, há 500 alunos. Sendo 800 o total de alunos da escola, a probabilidade de sortear um aluno da manhã é de $\frac{500}{800}$, ou $\frac{5}{8}$.

Qual é a probabilidade de se sortear um aluno do período noturno?

Observe que, fazendo um sorteio simples (amostragem simples), é possível que eu consiga uma amostra com a grande maioria de alunos do período da manhã, uma vez que a probabilidade de serem sorteados é bem maior que as demais.

As probabilidades são $\frac{5}{8}$ para o período da manhã, $\frac{2}{8}$ para o período da tarde e $\frac{1}{8}$ para o noturno.

Como o fenômeno "sortear alunos" é aleatório, não podemos garantir que, na amostra, haja representantes de todos os períodos. Para garantir essa representação devemos fazer a amostragem proporcional: para cada aluno do noturno devemos sortear 2 da tarde e 5 da manhã.

Na prática estaremos escolhendo 10% dos elementos da população, que é formada pelos 800 alunos:

10% de 500 : $500 \cdot \frac{10}{100} = 50$

10% de 200 : $200 \cdot \frac{10}{100} = 20$

10% de 100 : $100 \cdot \frac{10}{100} = 10$

Total : $800 \cdot \frac{10}{100}$ = 80 alunos

Para organizar nosso pensamento e nossa resposta poderíamos ter feito um quadro estatístico.

Período	Nº de alunos	Cálculo do nº de alunos da amostra	Alunos da amostra
manhã	500	10% de 500 → 0,10 . 500	50
tarde	200	10% de 200 → 0,10 . 200	20
noite	100	10% de 100 → 0,10 . 100	10
total	800	10% de 800 → 0,10 . 800	80

Quadro 2

Lembre-se, a representatividade da amostra é importante para que o resultado obtido possa ser estendido para a população. Quanto maior a porcentagem de elementos da amostra, maior será a representatividade.

Desenvolvendo competências

3

Vamos resolver outros problemas.

1. Em uma escola, a professora de Educação Física deverá fazer um estudo sobre a altura de seus alunos. Agrupando-os por faixa etária, considerando sempre a idade completada até março, ela quer usar uma amostra com 20% da população de sua pesquisa.

Faixa etária	7 a 10 anos	11 a 14 anos	15 a 18 anos	total
População	160	90	80	330

Quadro 3

Você já estudou que, para encontrar amostras, utilizamos porcentagens. Assim, garantimos a probabilidade de termos elementos que representem proporcionalmente toda a população. Encontre a amostra para a professora.

2. O quadro 4 apresenta o número de operários de cada setor da empresa.

Se o total é de 800 operários, qual é a probabilidade de sortearmos um que seja do setor de produção?

São 410 os funcionários do setor de produção. A probabilidade de um deles ser sorteado, $\frac{410}{800}$ *= 0,5125, ou 51,25%. Se calcularmos a chance de ser sorteado um funcionário do setor de controle de qualidade, teremos* $\frac{20}{800}$ *= 0,025, ou 2,5%.*

Observando que as probabilidades de escolha são diferentes nos diversos setores, devemos escolher uma amostra proporcional.

Copie e complete o quadro, para obter uma amostra com 200 elementos formada pelos funcionários da empresa.

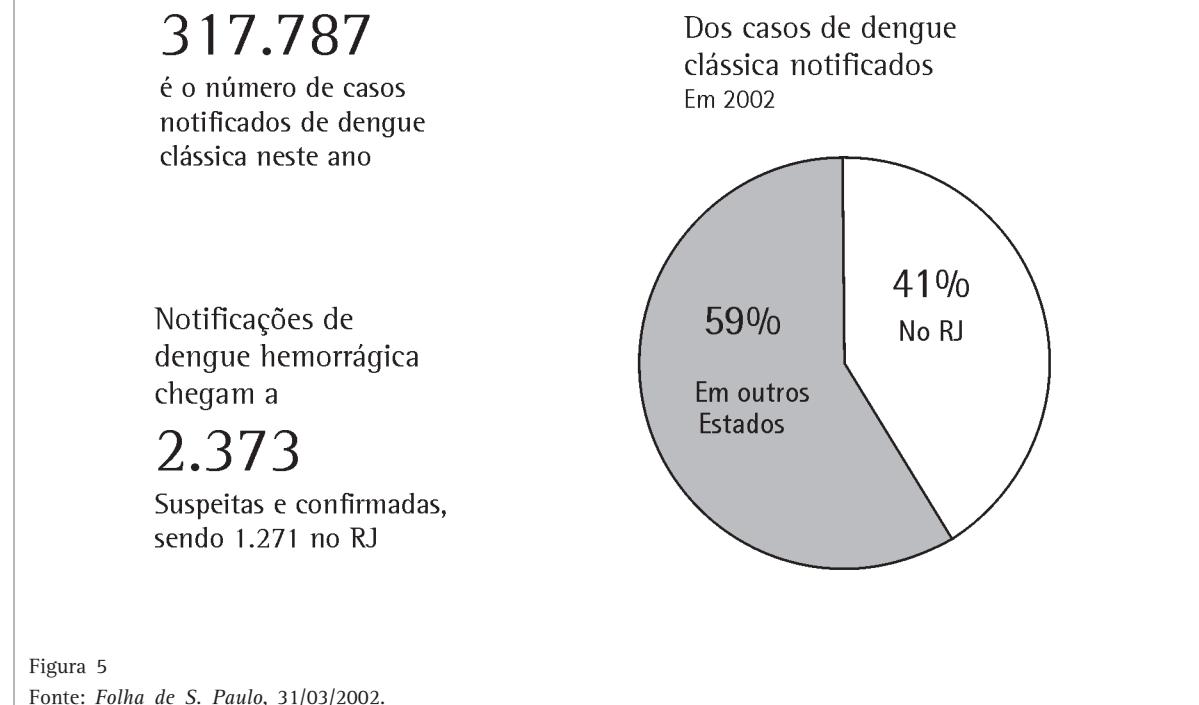
OPERÁRIOS DE UMA EMPRESA, POR SETORES

Setor	Número
Administração	30
Limpeza	40
Cozinha	20
Produção	410
Controle de Qualidade	20
Vendas	280
Total	800

Quadro 4
Fonte de dados: Administração da Empresa

3. Para estudo sobre a incidência de cárie entre os filhos dos funcionários de uma firma, o empresário quer fazer uma amostragem, organizando as crianças por faixa etária, considerando as idades em anos.

Idades	*1 a 2 anos*	*3 a 5 anos*	*6 a 8 anos*	*9 a 11 anos*	*12 a 14 anos*
Nº de crianças	40	60	70	50	35

Quadro 5

Ele já tem o quadro:

Encontre uma amostra com 20% dos elementos da população.

Continuando nossa conversa

Você costuma ler jornais? Eles sempre trazem notícias com resultados de pesquisas. Veja os dados que retiramos de uma reportagem publicada a 31/03/2002, no jornal *Folha de S. Paulo*.

A notícia se refere ao resultado de uma pesquisa sobre o número de casos de dengue clássica nesse ano.

317.787

é o número de casos notificados de dengue clássica neste ano

Notificações de dengue hemorrágica chegam a

2.373

Suspeitas e confirmadas, sendo 1.271 no RJ

Dos casos de dengue clássica notificados

Em 2002

Figura 5

Fonte: *Folha de S. Paulo*, 31/03/2002.

Você já ouviu falar dessa doença? Quantas pessoas você conhece que já tiveram dengue?

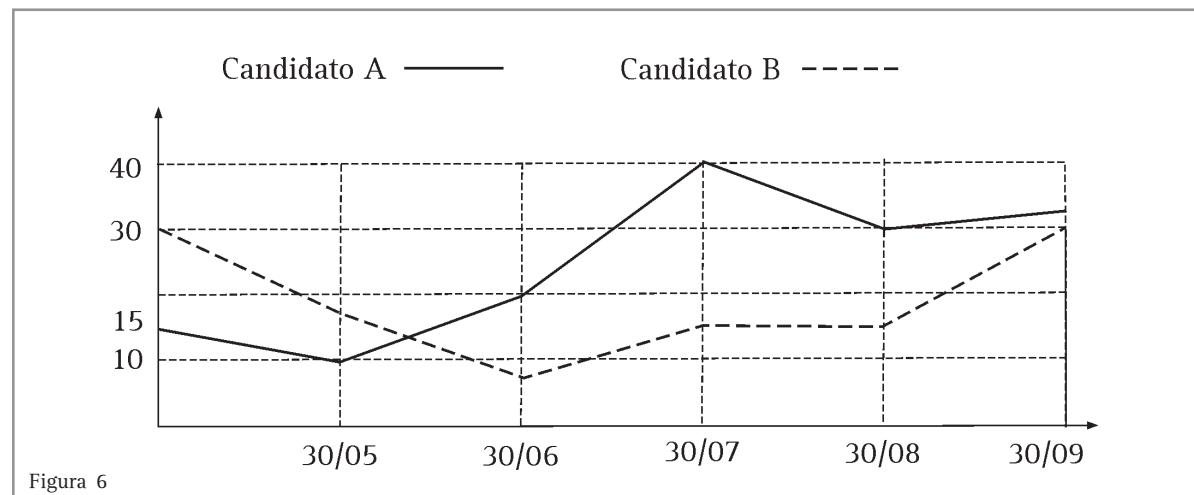
Veja, no texto, que número indica os casos notificados da doença. Junto a essa notícia, aparece um gráfico de setores. É um círculo dividido em partes que representam as porcentagens do fenômeno observado. No caso dessa notícia, vemos que na parte que representa o percentual de casos no Estado do Rio de Janeiro, está escrito 41%.

O texto indica que há 317.787 casos de dengue. No total, podemos dizer que esses casos são, aproximadamente, 318 mil, sendo 41% no Estado do Rio de Janeiro.
Quantos são os casos nesse Estado?

Os casos de dengue no Estado do Rio de Janeiro são 41% de 318.000, ou seja, 0,41 x 318.000 = 130.380

Em um outro trecho, a reportagem afirma que há 2.373 casos de dengue hemorrágica nos estados brasileiros, sendo 1.271 no Rio de Janeiro. Sem fazer cálculos, podemos pensar qual é a porcentagem aproximada de casos de dengue hemorrágica no Estado do Rio de Janeiro. Para saber que porcentagem 1.271 representa em relação a 2.373, calcule 1.271 : 2.373 (se possível, use uma calculadora) e escreva o resultado em forma de porcentagem. Observe que o resultado é um pouco maior que 50%, isto é, é um pouco maior do que a metade dos casos de dengue. Você tinha acertado, antes de fazer o cálculo?

DISCUTA COM PESSOAS DE SEU RELACIONAMENTO:

- *Como a dengue é transmitida?*
- *Existe vacina contra a dengue?*
- *A pessoa que já teve dengue poderá contraí-la novamente?*
- *O que devemos fazer para diminuir os casos de dengue?*
- *Faça um levantamento dos terrenos baldios onde está acumulado lixo que pode conter água da chuva e ser criadouro. Com tais dados, dirija-se ao setor de controle de zoonoses ou à Prefeitura de sua cidade, para argumentar sobre a necessidade de interferência das autoridades, junto aos donos dos terrenos, para que façam a limpeza, evitando o acúmulo de água e lixo.*

Resolvendo o Problema

Observe que a Estatística nos permite estudar fenômenos do dia a dia, descrevendo-os e, muitas vezes, permitindo que façamos previsões da probabilidade de ocorrência de determinados acontecimentos.

Veja um exemplo. Haverá uma eleição em que dois candidatos estão na disputa e a televisão anunciou o resultado de uma pesquisa:

A linha que representa o candidato A mostra que houve um crescimento nas intenções de voto, até 30 /07, tendo decrescido, no período de 30/07 a 30/08, e voltando a crescer, lentamente, no período de 30/08 a 30/09.

Figura 6

Observe o candidato B. O que o gráfico com a linha interrompida mostra? Quem você acha que ganharia a eleição em 30/09? Se a eleição acontecesse nesse dia, o resultado estaria indefinido, mas há grande possibilidade do candidato B vencer, porque a curva indica o crescimento de intenção de votos para ele. Se o crescimento se concretizar, ele será o vencedor.

Veja que os resultados das pesquisas são números próximos. Dizemos que há um empate estatístico. Mas observe a curva do gráfico.

O candidato B, que havia saído na frente, teve um decréscimo nas intenções de voto, voltando a subir a partir de 30/06, com um crescimento bem maior no período de 30/08 a 30/09, enquanto o candidato A teve uma queda no período de 30/07 a 30/08 e um pequeno crescimento de 30/08 a 30/09.

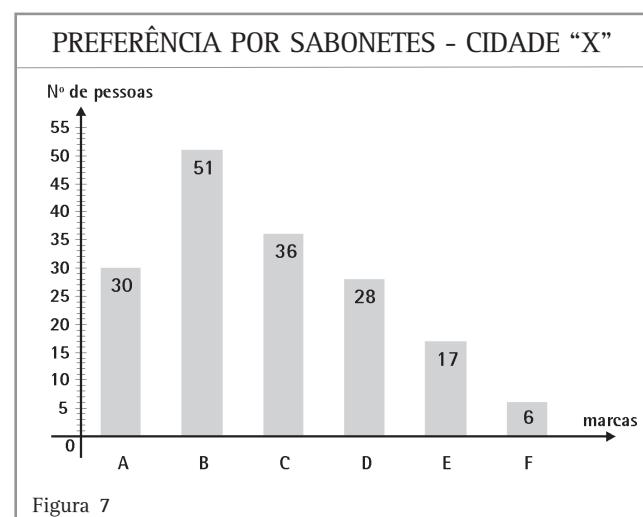
As intenções de voto apontam como mais provável a vitória do candidato B, se o crescimento continuar no mesmo ritmo até a eleição.

Você viu como fatos complexos podem, muitas vezes, ser representados por gráficos e descritos numericamente, facilitando sua compreensão. A sociedade moderna acumula uma grande quantidade de informações e dados numéricos relativos a eventos de toda ordem: econômicos, esportivos, históricos, geográficos, políticos ou da natureza.

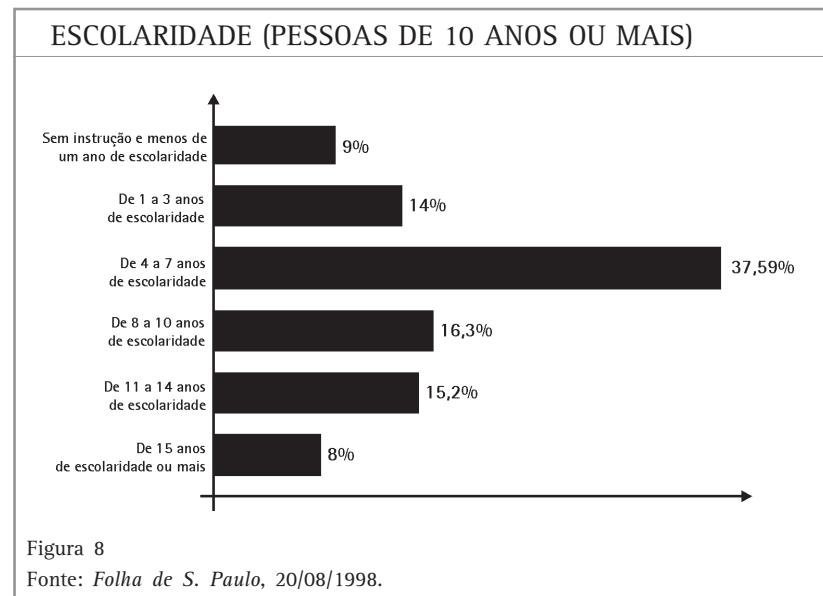
Desenvolvendo competências

4

Vamos resolver outros problemas.

1. Uma empresa deseja lançar determinado sabonete no mercado.
Para saber se terá sucesso, faz uma pesquisa sobre a preferência dos consumidores. Feita a amostragem, alguns pesquisadores são distribuídos em alguns pontos de uma cidade, perguntando às pessoas que passam qual é o seu sabonete preferido. As respostas vão sendo anotadas, para serem depois representadas em uma tabela (Tabela 1).

PREFERÊNCIA POR SABONETES - CIDADE “X”

Marcas de sabonete	F (Freqüência)
A	30
B	51
C	36
D	28
E	17
G	6
Total	168

Tabela 1

Você sabe o que indica o número 30, na primeira linha da tabela?
Qual é a marca de sabonete menos citada?

A representação dos dados também pode ser feita por um gráfico. Veja o ***gráfico de colunas*** *feito com os dados da pesquisa.*

Figura 7

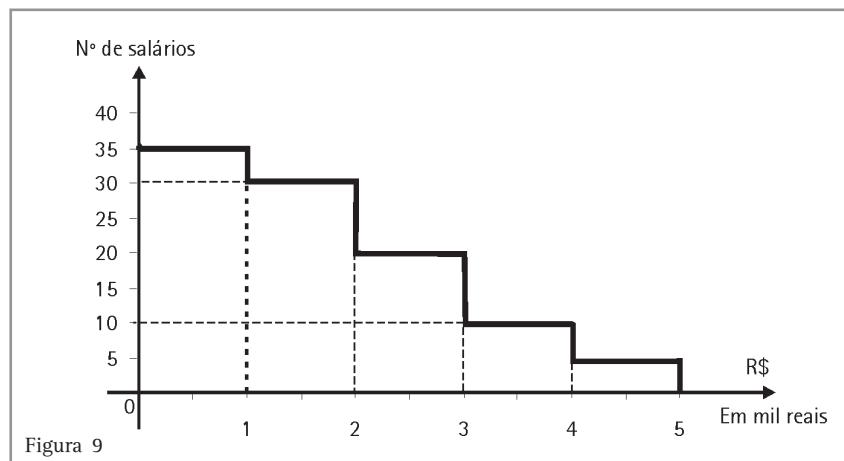
2. Em jornais e revistas, é comum serem publicados apenas os gráficos de uma pesquisa. Veja o exemplo de um dos gráficos sobre a escolaridade dos moradores da cidade de São Paulo, de dez anos ou mais, com dados coletados no censo de 1991, pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), publicados na Folha de S. Paulo de 20/08/1998.

ESCOLARIDADE (PESSOAS DE 10 ANOS OU MAIS)

Figura 8
Fonte: *Folha de S. Paulo*, 20/08/1998.

Observando o gráfico, podemos verificar que, na época da pesquisa, a maioria da população da cidade de São Paulo tinha de quatro anos a dez anos de escolaridade:

$$37{,}59 + 16{,}3 = 53{,}89\%.$$

Que porcentagem da população tinha menos de um ano de escolaridade?
Se a população da cidade era de aproximadamente 10 milhões de habitantes, quantos eram os habitantes com menos de um ano de escolaridade?

Desenvolvendo competências

5

Vamos resolver outros problemas.

1. O gráfico abaixo representa os salários dos funcionários de uma firma.

Figura 9

No eixo horizontal, estão representados os salários, em mil reais. A primeira coluna, com largura de 0 a 1, por exemplo, indica os salários entre zero e mil reais. Observando também a altura desta coluna, vemos que há 35 salários entre zero e 1.000 reais.

Assinale a resposta correta.

a) A quantidade dos salários mais altos é 35.

b) A quantidade dos salários mais baixos é 5.

c) Entre 4 e 5 mil reais estão os salários mais baixos.

d) Entre 4 e 5 mil reais estão os salários mais altos.

2. Se no dia 13 de agosto você se levanta da cama com o pé direito, se benze, ou bate na madeira para se livrar do azar, saiba que você não está sozinho.

Foi realizada uma pesquisa, publicada no jornal "Folha de S. Paulo", do dia 13 de agosto de 1993, que afirma que, de cada 100 pessoas, duas não pretendem sair de casa nesse dia, 7 pensam que esse dia dá azar, 10 acham que é um dia de sorte, mas 81% dizem que esse é um dia como outro qualquer.

Vamos fazer uma tabela com os dados do texto? Copie e complete a tabela com os dados do problema.

SUPERSTIÇÃO - COMO SERÁ O DIA 13 DE AGOSTO?

respostas	no. de pessoas	porcentagem
como outro qualquer	....	81
de sorte	....	....
de azar	....	....
para não sair de casa	....	....
Total	630	100

Tabela 2
Fonte: Adaptado da *Folha de S. Paulo*, São Paulo, 13 ago 1993.

Que porcentagem de pessoas poderia ter as atitudes de levantar com o pé direito, ou bater na madeira e se benzer?

Continuando nossa conversa

Se você já ficou atento a comentários esportivos, já ouviu falar em média de gols. Veja o exemplo.

Em um campeonato de futebol, a regra diz que, se houver empate na final, será considerado vencedor o time que tiver melhor média de gols, durante os últimos quatro jogos. Os times A e B empataram no jogo da decisão. Observe a tabela dos gols por partida e descubra quem foi considerado campeão.

Time \ Partidas	1ª partida	2 ª partida	3ª partida	4 ª partida
A	2	5	1	0
B	3	2	2	3

Quadro 6

Para calcular a média aritmética, basta somar todos os gols de cada time e dividir por quatro, uma vez que são quatro os jogos. Assim, você deve ter descoberto que o time campeão foi o B, com uma média de 2,5 gols por partida, contra 2 gols por partida, do time A.
Fizemos o cálculo de uma medida, a média aritmética de gols, que nos permitiu comparar o desempenho de cada time em quatro partidas.
A média aritmética é uma medida bastante utilizada em nosso dia-a-dia.
Você se lembra do "apagão"?

No ano de 2001, as companhias de energia elétrica enviaram cartas às residências, referindo-se ao consumo de energia elétrica e à necessidade de economia.
A meta era de economizar 20% de energia sobre a média dos meses de maio, junho e julho de 2001.

Dona Luz, que mora em São Paulo, recebeu a correspondência.

Sr(a) Cliente,
Atendendo à Resolução nº 004 de 23/05/2002, da Câmara de Gestão da Crise de Energia Elétrica, informamos o cálculo da meta do consumo de energia elétrica, adotando-se como base de referência os meses indicados como referência para determinar o consumo médio dessa unidade consumidora:

Mês	Consumo de referência (kWh)
Maio/2000	417
Junho/2000	408
Julho/2000	406
Soma	1231

Consumo médio $\frac{1231}{3} = 410$ *kWh*

Meta (redução de 20%): 410 x (1 - 0,20) = 328
A partir de junho de 2001, sua meta é de 328 kw/h.

Você sabe o que foi feito para saber a meta de consumo?
Nessa correspondência, a Companhia de Energia Elétrica de São Paulo, Eletropaulo, apresenta o cálculo da média aritmética dos três meses considerados como base.

A soma dos consumos dos três meses é:

417 + 408 + 406 = 1.231. Dividindo a soma obtida por 3 (três é a quantidade de meses considerados como referência), foi calculada a média aritmética do consumo dos 3 meses/referência :

1.231 : 3 = 410 kWh

Como a lei determinou que todos os consumidores de São Paulo, a partir de 4 de junho, deveriam economizar 20% no consumo de energia elétrica, que porcentagem dona Luz poderia gastar? A Eletropaulo calculou 80% de 410kwh:

410 x (1 - 0,20) = 328kWh.

Lembre-se de que

1 – 0,20 significa **100% - 20% = 80%**

Conversando mais um pouco

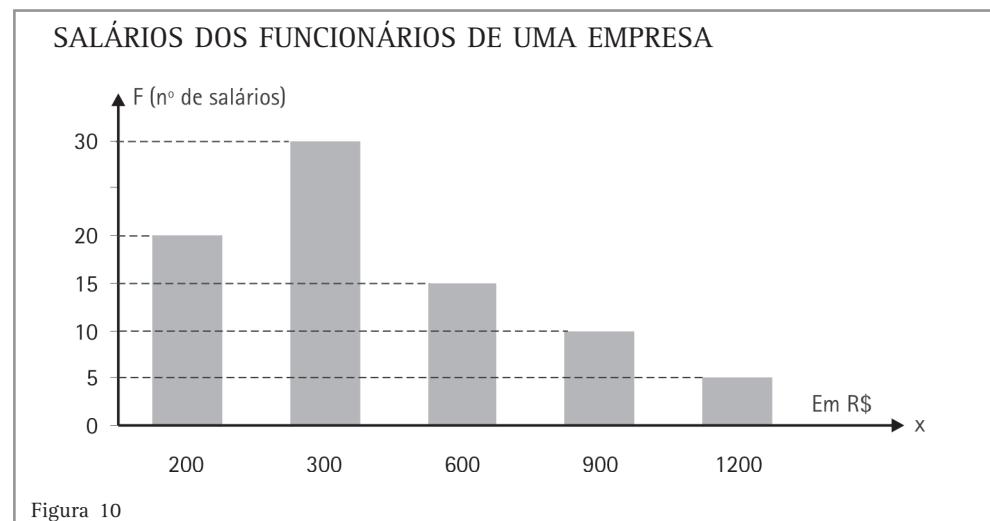
Existem outras medidas bastante usadas em Estatística: a moda e a mediana. Média aritmética, mediana e moda são chamadas medidas de tendência central. Veja um exemplo.

Em uma escola, os alunos de uma classe fizeram uma prova e os números das questões que cada um acertou foram anotados no quadro 8.
Maria acertou 8 questões. Ela acertou mais ou menos que a média da classe?
São cinco alunos. Você precisa calcular o total de pontos que a turma toda fez, para dividir por cinco.
Veja: 15 + 8 + 10 + 7 + 10 = 50 , então, a média aritmética é Ma = 10 e Maria, que acertou 8 questões, acertou menos que a média da classe.

Já sabemos que Ma = 10 significa que, se todos tivessem o mesmo número de acertos, cada um teria acertado 10 questões.
Média aritmética é a distribuição equitativa dos dados, ou seja, é a distribuição dos dados em partes iguais.
Colocando os dados em ordem, podemos descobrir o termo que ocupa a posição do meio:

8 8 **9** 10 15. No nosso exemplo, o termo do meio é o número 9: há dois termos a sua esquerda e dois a sua direita.

O termo que ocupa a posição do meio é chamado **mediana.**

E qual é o número de acertos que aparece mais vezes?
O dado que “aparece mais vezes” (com maior freqüência) é chamado **moda.**

No exemplo, a moda é 8 pontos.

nomes	*Joana*	*Maria*	*Antonio*	*José*	*Selma*
acertos	*15*	*8*	*10*	*8*	*9*

Quadro 7

Vamos resolver outros problemas

1. Observe o gráfico abaixo:

Figura 10

Analisando o gráfico, nós podemos verificar que a **moda** dos salários dessa empresa é 300 reais. É a coluna mais alta no gráfico. Há 30 salários de 300 reais. Quantos reais a empresa gasta para pagar esses salários de 300 reais ?

Você deve ter respondido 30 · 300 = 9.000 reais.

Agora veja a coluna mais baixa: há 5 salários iguais ao maior da empresa.

Que salário é esse? Quanto a empresa gasta com os maiores salários?

Para calcular a **média aritmética** dos salários, precisamos saber quantos eles são e quanto a empresa gasta com todos. Quantos são os salários da empresa?

Observando, no gráfico, os números que representam as freqüências e somando-os, saberemos que são 80 salários.

Quantos reais a empresa gasta com todos os salários ?

Multiplicando cada salário (x) por sua freqüência (F), temos:

20 salários de 200 reais → 20 · 200 = 4.000

30 salários de 300 reais → 30 · 300 = 9.000

15 salários de 600 reais → 15 · 600 = 9.000

10 salários de 900 reais → 10 · 900 = 9.000

5 salários de 1200 reais → 5 · 1200 = 6.000

Cada produto significa a soma dos salários iguais. Assim, por exemplo, 20 · 200 significa a soma dos 20 salários iguais a 200 reais.

Somando os produtos, saberemos que a empresa gasta 37.000 reais com seus 80 funcionários. A média aritmética é 462,50 reais, ou R$ 462,50.

Para organizar e facilitar os cálculos de média aritmética, podemos representar os dados em uma tabela. No exemplo anterior, para calcular a média aritmética, a tabela fica:

SALÁRIO DOS FUNCIONÁRIOS DA EMPRESA

x (em reais)	F	F.x
200	20	4.000
300	30	9.000
600	15	9.000
900	10	9.000
1.200	5	6.000
total	80	37.000

Tabela 3
Fonte: Recursos humanos da empresa

Na primeira coluna estão representados os salários (x) e, na coluna F, estão as quantidades de salários.
Na terceira coluna estão os produtos F.x, que representam as somas dos salários, em cada linha. Assim, 4.000 é a soma dos 20 salários iguais a 200 reais.

Vamos pensar em outro problema de média aritmética.

2. Suponhamos que você tem dinheiro aplicado na poupança e que, durante 5 meses, anotou seus rendimentos em uma tabela.

Mês	Rendimento em reais
Janeiro	11,20
Fevereiro	12,50
Março	15,60
Abril	15,50
Maio	15,20
total	70,00

Tabela 4

Como calcularia o rendimento médio durante esses meses?
Na barra inferior da tabela, está indicada a soma dos rendimentos, que é 70 reais. Como são rendimentos de 5 meses, basta calcular
70 : 5 = 14.
A média dos rendimentos de sua poupança nos 5 meses foi de R$14,00.

Vamos resolver outros problemas

1. Maria ouviu uma música que citava a estatura das pessoas: " Sou brasileiro de estatura mediana..." Ficou pensativa e, conversando com seu irmão, perguntou-lhe se média e mediana eram valores iguais.

Você saberia responder?

Seu irmão Jorge propôs que ela fosse medindo as alturas de seus amigos, e fosse anotando as medidas, em centímetros, formando um rol, em ordem crescente:

140 140 150 150 155 165 175 180 185

Ajude Maria a responder às questões que Jorge também lhe propôs.

A mediana é o valor que ocupa a posição do meio. Qual é esse valor?

Para calcular a média, você deve saber o total dos dados e dividir pela quantidade deles. Calcule a média aritmética.

Você deve ter percebido que, nesse caso, a média (160cm) e a mediana (155cm) são valores diferentes. Na maioria dos casos isso acontece porque essas medidas têm significados diferentes.

2. Os funcionários de uma empresa estavam reivindicando melhores salários. O dono conferiu os números, registrados em seus documentos, e recusou a solicitação. Usou como argumento o fato de a média dos salários ser de aproximadamente R$1.485,00.

Os funcionários acharam-se enganados e iniciaram um movimento de greve. E alguns, mostrando seus contra-cheques, chegaram a comentar que o dono não dizia a verdade.

Veja, abaixo, a tabela de salários dos funcionários da empresa e discuta o que aconteceu nessa relação trabalhista.

SALÁRIO DOS FUNCIONÁRIOS DA EMPRESA

X (em reais)	F
400	50
500	20
1.000	20
2.000	5
10.000	3
20.000	3
total	101

Tabela 5

- *Será que não havia verdade no argumento do dono?*
  Calcule a média dos salários.
- *Os funcionários não tinham razão, ao reivindicar melhores salários?*
- *Como você resolveria este impasse?*

Muitas vezes, as pessoas confundem média com a mediana ou com a moda. Em uma distribuição normal, essas três medidas se localizam mais ou menos na posição do meio. No nosso exemplo, a moda é 400 reais e a mediana é 500 reais (total de 101 salários). A média é realmente aquela que o dono diz, porque os poucos salários altos fazem com que a média seja alta.

A soma dos 3 salários mais altos é 3 . 20.000 = 60.000, enquanto que a soma dos mais baixos (praticamente metade dos salários da firma) é:

50 · 400 = 20.000.

Com os 3 salários mais altos, o empresário gasta o triplo do que gasta com os 50 menores salários da firma. A distribuição de salários dessa empresa não é estatisticamente normal.

Desenvolvendo competências

6

O dono de uma empresa paga os salários a seus funcionários de acordo com a tabela abaixo.

SALÁRIO DOS FUNCIONÁRIOS

X (em reais)	F
400	50
500	15
2.000	3
10.000	2
total	70

Tabela 6

Assinale a alternativa correta.

a) A média aritmética dos salários é menor que a mediana.

b) A média aritmética dos salários é maior que a moda.

c) A média aritmética dos salários é igual à mediana.

d) A média aritmética dos salários é menor que a moda.

A média aritmética (ou das outras medidas de tendência central, moda e mediana), sozinha, não retrata o comportamento de um conjunto de dados.

Veja um exemplo.

Consideremos o caso em que uma mesma prova foi aplicada a dois grupos de alunos e que as notas foram as seguintes:

Grupo A								
1,0	2,0	5,0	5,0	**5,0**	8,0	8,0	10,0	10,0

Grupo B								
5,0	5,0	5,0	5,0	**5,0**	5,0	8,0	8,0	8,0

Calcule a média para cada conjunto de dados.

A média dos dois grupos de notas é a mesma, mas observe que os comportamentos dos dois conjuntos de dados são diferentes:

- no grupo A as notas variam de 1,0 a 10,0
- no grupo B, as notas variam de 5,0 a 8,0.

Podemos dizer que as notas do grupo B estão mais "concentradas", perto da média aritmética, do que as do grupo A, ou então dizemos que a dispersão é maior no grupo A.

Para analisar melhor o comportamento de um conjunto de dados, a Estatística se utiliza de outras medidas como, por exemplo, o desvio padrão.

Observe que , no exemplo, os dois conjuntos de dados também têm a mesma moda e a mesma mediana.

Conferindo seu conhecimento

1

Os resultados diferentes que poderiam ter ocorrido são: CC, CR e RC

2

A probabilidade de seu bairro ser sorteado seria de um entre os 50 da cidade, ou $\frac{1}{50}$.

A probabilidade de sua rua ser sorteada, entre as 500 de seu bairro, é $\frac{1}{500}$.

Queremos sortear uma das 25 000 ruas. A probabilidade é $\frac{1}{25.000}$. *Viu como é pequena a chance de ser sorteada a sua rua? Por quê ?*

A chance de sortear um dos 50 bairros era $\frac{1}{50}$, *e a chance de sortear uma em 500 ruas é 1/500. Logo, a chance é* $\frac{1}{500}$ *de* $\frac{1}{50}$ *, ou seja,* $\frac{1}{500} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{25.000}$.

A probabilidade de uma casa ser sorteada é $\frac{1}{50} \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{80}$ *ou* $\frac{1}{2.000.000}$.
(Uma em dois milhões!)

3

Problema 1

Faixa etária	População	Cálculo nº de elementos amostra	Amostra
7 a 10 anos	160	20% de 160 ⇒ 160 · 0,20	32
10 a 14 anos	90	20% de 90 ⇒ 90 · 0,20	18
14 a 18 anos	80	20% de 80 ⇒ 80 · 0,20	16
Total	330	20% de 330 ⇒ 330 · 0,20	66

Problema 2 *- Para resolver o problema, basta pensar que porcentagem 200 é de 800, e calcular essa porcentagem dos funcionários de cada setor. 200 em 800 é 200/800 = 0,25 ou 25% (ou ¼). Então basta calcular 25% dos funcionários de cada setor. A amostra ficará com 8 funcionários da administração, e 10, 5, 102, 5 e 70 dos demais setores, respectivamente.*

***Problema 3** - Calculando 20% em cada faixa etária, o quadro sobre incidência de cárie ficará:*

Idades	*1 a 2 anos*	*3 a 5 anos*	*6 a 8 anos*	*9 a 11 anos*	*12 a 14 anos*
Nº de crianças	*40*	*60*	*70*	*50*	*35*
Amostra	*8*	*12*	*14*	*10*	*7*

4

***Problema 1** - Na tabela, o número 30 indica que o sabonete A foi citado 30 vezes.*

Pela altura da coluna do sabonete B no gráfico da figura 6, vemos que ele foi o mais citado.

O sabonete G foi o menos citado.

***Problema 2** - Observando o gráfico (Figura 7) podemos ver que são 9%. Calculando 9% de 10 milhões, temos 0,09 · 10 000 000 = 900.000. São 900 mil pessoas.*

5

***Problema 1** - Resposta: d*

***Problema 2** - Usando números aproximados, sua tabela deve ter ficado:*

Superstição - Como será o dia 13 de agosto?

Respostas	*Quantos*	*%(porcentagem)*
como outro qualquer	*513*	*81*
de sorte	*63*	*10*
de azar	*42*	*7*
para não sair de casa	*12*	*2*
total	*630*	*100*

Fonte: *Folha de S. Paulo*, São Paulo, 13 jul. 1993.

9 pessoas (7+2=9) poderiam ter atitudes de demonstração de medo, no dia 13.

6

Resposta (b).

Orientação final

Para saber se você compreendeu bem o que está apresentado neste capítulo, verifique se está apto a demonstrar que é capaz de:

- Identificar, interpretar e produzir registros de informações sobre fatos ou fenômenos de caráter aleatório.
- Caracterizar ou inferir aspectos relacionados a fenômenos de natureza científica ou social, a partir de informações expressas por meio de uma distribuição estatística.
- Resolver problemas envolvendo processos de contagem, medida e cálculo de probabilidades.
- Analisar o comportamento de variável, expresso por meio de uma distribuição estatística como importante recurso para a construção de argumentação consistente.
- Avaliar, com auxílio de dados apresentados em ditribuições estatísticas, a adequação de propostas de intervenção na realidade.